# Petits sorts de Mathémagie

Kevin Trancho

07 juillet 2020

# Table des matières

**1 Apparitions** **3**
1.1 Mecanisme par ajout . . . 3
1.2 Utilisation dans avec fractions . . . 3
1.2.1 Méthode générale . . . 3
1.2.2 Application avec des suites . . . 4
1.2.3 Application avec les intégrales . . . 4
1.3 Mecanisme par factorisation . . . 5
1.4 Utilisation . . . 5
1.4.1 Forme canonique . . . 5
1.4.2 Equation de cercle . . . 6
1.5 Retour sur les fractions . . . 6
1.5.1 Avec coefficients . . . 6
1.5.2 Intégrale de fraction avec coefficients . . . 7
1.5.3 Intégrale de fraction de fonction affine sur polynôme de degré 2 . . . 7
1.5.4 Intégrale de fraction de polynômes de degré 2 sur degré 2 . . . 9

**2 Suites récurrentes type Fibonacci** **11**
2.1 La suite de Fibonacci . . . 11
2.1.1 Introduction . . . 11
2.1.2 Équivalence avec une suite à deux variables . . . 11
2.1.3 Calcul en temps logarithmique . . . 12
2.2 Et la suite ? . . . 12
2.2.1 Introduction . . . 12
2.2.2 Un exemple . . . 12
2.2.3 Transformation pour calcul en temps logarithmique . . . 13

# Préface

Ce document en est à une première version test. Par conséquent, il est encore incomplet. Mais s'il intéresse le lecteur, le principe est ici de donner des outils et une manière de jouer avec les mathématiques qui vise à montrer à la fois leur puissance et une manière de les construire.

Lire ce document, peut demander des notions d'intégration (intégrale de Riemann) et d'algèbre linéaire (calcul matriciel).

Pour le moment l'idée principale étudie est la transformation de suites. Il ne faut pas hésiter à me pousser dans cette direction si le document plaît au lecteur.

Il est probable que j'aborde par la suite de la combinatoire (transformation de suites à l'aide de séries génératrices), décomposition en nombre premiers pour optimiser des calcul (par exemple la factorielle ou transformer un produit de logarithmes en système linéaire), de la manipulation de géométrie à l'aide des complexes et quaternions, de la résolution numérique (calcul de zéros, approximation d'intégrale et sommes de Riemann), de la théorie des nombres (constructions de corps finis) et d'autres sujets cool que je n'ai pas encore pensé à noter quelque part.

# Chapitre 1

# Apparitions

## 1.1 Mecanisme par ajout

Pour simplifier une équation ou un calcul, on peut avoir recours à ce que je peux appeler une apparition.
C'est-à-dire que je peux affirmer que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ pouvant être $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ ou un autre ensemble dans lequel on souhaitre travailler)
On a :

$$\alpha = \alpha + (\beta - \beta) = \alpha + \beta - \beta = \alpha - \beta + \beta$$

## 1.2 Utilisation dans avec fractions

### 1.2.1 Méthode générale

Le cas où l'utilisation de ce genre de choses peut être très utile est par exemple les fractions.
Résolvons l'équation :
$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq -\beta$

$$\frac{x + \alpha}{x + \beta} = \gamma$$

Effectuons une apparition de $\beta$ :

$$\frac{x + \alpha + \beta - \beta}{x + \beta} = \gamma$$

$$\frac{x + \beta + \alpha - \beta}{x + \beta} = \gamma$$

Nous pouvons maintenant séparer la fraction en deux éléments :

$$\frac{x + \beta}{x + \beta} + \frac{\alpha - \beta}{x + \beta} = \gamma$$

Cette décomposition avait pour but de simplifier le premier élement :

$$1 + \frac{\alpha - \beta}{x + \beta} = \gamma$$

La résolution de l'équation est maintenant triviale.

$$\frac{\alpha - \beta}{x + \beta} = \gamma - 1$$

$$\alpha - \beta = (\gamma - 1)(x + \beta)$$

Si $\gamma - 1 \neq 0$

$$\frac{\alpha - \beta}{\gamma - 1} = x + \beta$$

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-1}-\beta = x$$

$$x = \frac{\alpha-\beta}{\gamma-1}-\beta$$

Si $\gamma - 1 = 0$ ceci est un cas dégénéré, autrement dit si $\gamma = 1$, il n'y a solution que si $\alpha - \beta = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \beta$ car $x \neq -\beta$
Si $\alpha = \beta$ l'équation deviendrait alors $\frac{x+\beta}{x+\beta} = 1 \Leftrightarrow x+\beta = x+\beta$ donc vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$
Sinon pas de solutions.

**Exercices pour pratiquer**

Montrer les équivalences suivantes :

$$\frac{x+1}{x+2} = 2 \Leftrightarrow x = -3$$
$$\frac{x}{x+3} = -2 \Leftrightarrow x = -2$$
$$\frac{x-\pi+1}{x-\pi} = 2 \Leftrightarrow x = \pi+1$$

### 1.2.2 Application avec des suites

On peut retrouver ce type de problème avec des suites, c'est-à-dire :
Soient les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$V_n = \frac{U_n+\alpha}{U_n+\beta}$$

Avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Si on cherche à exprimer $U_n$ en fonction de $V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela revient à résoudre la forme $\frac{x+\alpha}{x+\beta} = \gamma$ vue précédemment.

**En exercice**

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \frac{-\beta V_n + \alpha}{V_n - 1}$$

### 1.2.3 Application avec les intégrales

L'utilisation de ce genre de méthode peut s'avérer assez efficace pour calculer certaines intégrales.
Soient $\alpha, \beta, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
Calculer :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{x+\alpha}{x+\beta}\mathrm{d}x$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{x+\beta-\beta+\alpha}{x+\beta}\mathrm{d}x$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} 1+\frac{\alpha-\beta}{x+\beta}\mathrm{d}x$$
$$= [x+(\alpha-\beta)\ln(x+\beta)]_{x_1}^{x_2}$$

## 1.3 Mecanisme par factorisation

Il est aussi pratique d'avoir recours à ce qu'on appelle la factorisation, on peut focer l'apparition de facteur pour simplifier certains calculs.
C'est-à-dire que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tout $\beta \in \mathbb{K}^*$ ($\mathbb{K}$ notre ensemble de travail, bien souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on a :

$$\alpha = \alpha\frac{\beta}{\beta} = \frac{\alpha\beta}{\beta} = \beta\frac{\alpha}{\beta}$$

## 1.4 Utilisation

### 1.4.1 Forme canonique

Avec les apparitions par ajout et par factorisation la forme canonique d'un polynôme du second degré va être simple à retrouver :
Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b$ et $c \in \mathbb{R}$ tels qu'on définit la fonction :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a alors :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

On applique ici une apparition par factorisation sur $bx$ :

$$f(x) = ax^2 + a\frac{b}{a}x + c$$

Ce qui permet de voir une factorisation évidente par $a$ :

$$f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

On peut de même essayer de faire apparaître une identité remarquable en deux étapes :
Apparition par factorisation :

$$f(x) = a(x^2 + 2\frac{b}{2a}x) + c$$

Apparition par ajout de ce qui manque à l'identité $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ :

$$f(x) = a(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c$$

$$f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}) + c$$

On distribue $a$

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c$$

Apparition de $4a$ sur $c$

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c\frac{4a}{4a}$$

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

On pose maintenant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{-b^2+4ac}{4a}$ ce qui nous donne la forme canonique suivante :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

### 1.4.2 Equation de cercle

Pour rappel l'équation d'un cercle de centre $(x_c, y_c)$ et de rayon $R$ est :

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

Imaginons maintenant avoir à faire à une equation du type :
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$$

De la même manière que pour la forme canonique vue précédemment, nous allons chercher à faire apparaître des identités remarquables :

$$x^2 + 2\frac{a}{2}x + y^2 + 2\frac{b}{2}y + c = 0$$

$$x^2 + 2\frac{a}{2}x + (\frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2 + y^2 + 2\frac{b}{2}y + (\frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2 + c = 0$$

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

Si $a^2 + b^2 - 4c > 0$ ceci est l'équation d'un cercle de centre $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

## 1.5 Retour sur les fractions

### 1.5.1 Avec coefficients

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $c, d, x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq -\frac{d}{b}$ tels que :

$$\frac{ax + c}{bx + d} = y$$

Pour résoudre cette forme, il va être préférable de commencer par factoriser nos coefficients, c'est-à-dire :

$$\frac{ax + a\frac{c}{a}}{bx + b\frac{d}{b}} = y$$

$$\frac{a(x + \frac{c}{a})}{b(x + \frac{d}{b})} = y$$

$$\frac{a}{b}\frac{x + \frac{c}{a}}{x + \frac{d}{b}} = y$$

$$\frac{a}{b}\frac{x + \frac{c}{a}}{x + \frac{d}{b}} = \frac{a}{b}\frac{b}{a}y$$

$$\frac{x + \frac{c}{a}}{x + \frac{d}{b}} = \frac{b}{a}y$$

Nous pouvons maintenant nous amuser simplement avec cette forme que nous connaissons !

### 1.5.2 Intégrale de fraction avec coefficients

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec pour tout $-\frac{\lambda}{\beta} \notin [a, b]$ tels qu'on pose l'intégrale suivante :

$$\int_a^b \frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \lambda} \mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b \frac{\alpha x + \alpha \frac{\gamma}{\alpha}}{\beta x + \beta \frac{\lambda}{\beta}} \mathrm{d}x$$
$$\int_a^b \frac{\alpha}{\beta} \frac{x + \frac{\gamma}{\alpha}}{x + \frac{\lambda}{\beta}} \mathrm{d}x$$

On sort la constante $\frac{\alpha}{\beta}$ de l'intégrale :

$$\frac{\alpha}{\beta} \int_a^b \frac{x + \frac{\gamma}{\alpha}}{x + \frac{\lambda}{\beta}} \mathrm{d}x$$

Nous arrivons à une forme que nous avons déjà intégrée.

### 1.5.3 Intégrale de fraction de fonction affine sur polynôme de degré 2

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec pour tout $x \in [a, b]$, $x^2 + \alpha x + \beta \neq 0$ tels qu'on définit l'intégrale suivante :

$$\int_a^b \frac{x + \gamma}{x^2 + \alpha x + \beta} \mathrm{d}x$$

Cherchons à calculer la fonction à intégrer de sorte à obtenir une forme $\frac{u'}{u}$, autrement dit dans notre cas faire apparaître l'expression $\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}$ :

$$\frac{x + \gamma}{x^2 + \alpha x + \beta} = \frac{\frac{1}{2} 2x + \frac{1}{2} 2\gamma}{x^2 + \alpha x + \beta}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{2x + \alpha - \alpha + 2\gamma}{x^2 + \alpha x + \beta}$$
$$= \frac{1}{2} \left( \frac{2x + \alpha}{x^2 + \alpha x + \beta} + \frac{2\gamma - \alpha}{x^2 + \alpha x + \beta} \right)$$

La second partie de l'expression est de la forme $\frac{d}{ax^2+bx+c}$
Pour intégrer une expression de ce type on rappelle que la dérivée de $\arctan u$ est $\frac{u'}{1+u^2}$
Partons dans l'idée de passer le polynôme sous forme canonique, c'est-à-dire :

$$x^2 + \alpha x + \beta = \left( x + \frac{\alpha}{2} \right)^2 - \left( \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \beta$$
$$= \left( x + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \frac{4\beta - \alpha^2}{4}$$

On veut trouver une expression de forme $1 + u^2$, factorisons :

$$= \frac{4\beta - \alpha^2}{4} \left( \frac{\left( x + \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\frac{4\beta - \alpha^2}{4}} + 1 \right)$$
$$= \frac{4\beta - \alpha^2}{4} \left( \frac{\left( x + \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\sqrt{\frac{4\beta - \alpha^2}{4}}^2} + 1 \right)$$
$$= \frac{4\beta - \alpha^2}{4} \left( \left( \frac{x + \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\frac{4\beta - \alpha^2}{4}}} \right)^2 + 1 \right)$$

Il ne faudra pas oublier $u'$ dans la forme finale, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}}$$

On a alors :

$$\int_a^b \frac{x+\gamma}{x^2+\alpha x+\beta}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta} + \frac{2\gamma-\alpha}{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}\left(\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}}\right)^2+1\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta} + \frac{2\gamma-\alpha}{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}}\right)^2+1}\right)$$

Faisons apparaître $\frac{1}{\sqrt{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}}$ par facteur :

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta} + \frac{2\gamma-\alpha}{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}\frac{1}{\sqrt{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}}}\frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}}}{\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}}\right)^2+1}\right)$$

Pour simplifier, une forme de type $\frac{a}{b\frac{1}{\sqrt{b}}}$ se simplifie de la manière suivante :

$$\frac{a}{b\frac{1}{\sqrt{b}}} = \frac{a}{\frac{\sqrt{b}^2}{\sqrt{b}}} = \frac{a}{\sqrt{b}}$$

$$\int_a^b \frac{x+\gamma}{x^2+\alpha x+\beta}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta} + \frac{2\gamma-\alpha}{\sqrt{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}}\frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}}}{\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}}\right)^2+1}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\alpha x+\beta\right) + \frac{1}{2}\frac{2\gamma-\alpha}{\sqrt{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}}\right)\right]_a^b$$

### 1.5.4 Intégrale de fraction de polynômes de degré 2 sur degré 2

Généralisons un cran au dessus :
Soient $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\beta, \gamma, \mu, \eta \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec pour tout $x \in [a, b]$, $\lambda x^2 + \mu x + \eta \neq 0$ tels qu'on cherche à calculer l'intégrale suivante :

$$\int_a^b \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{\lambda x^2 + \mu x + \eta} \mathrm{d}x$$

Décomposons la fonction à intégrer en une somme d'élement d'intégrale simple à trouver, c'est-à-dire :
Factorisation des coefficients des polynômes

$$\frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{\lambda x^2 + \mu x + \eta} = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}}{x^2 + \frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\eta}{\lambda}}\right)$$

De la même manière que pour les fractions sur des polynômes de degré 1 (fonctions affines $ax + b$), on scinde la fraction par apparition

$$= \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{x^2 + \frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\eta}{\lambda}}{x^2 + \frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\eta}{\lambda}} + \frac{\frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\mu}{\lambda}x - \frac{\eta}{\lambda}}{x^2 + \frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\eta}{\lambda}}\right)$$

$$= \frac{\alpha}{\lambda}\left(1 + \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\mu}{\lambda}\right)x + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\eta}{\lambda}\right)}{x^2 + \frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\eta}{\lambda}}\right)$$

On veut maintenant une forme simple à intégrer, cherchons à faire apparaître une forme $\frac{u'}{u}$, autrement dit ici une forme $\frac{2x+a}{x^2+ax+b}$

$$= \frac{\alpha}{\lambda}\left(1 + \frac{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\mu}{\lambda}}{2}\,\frac{2x + 2\frac{\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\eta}{\lambda}}{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\mu}{\lambda}}}{x^2 + \frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\eta}{\lambda}}\right)$$

$$= \frac{\alpha}{\lambda}\left(1 + \frac{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\mu}{\lambda}}{2}\left(\frac{2x + \frac{\mu}{\lambda}}{x^2 + \frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\eta}{\lambda}} + \frac{-\frac{\mu}{\lambda} + 2\frac{\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\eta}{\lambda}}{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\mu}{\lambda}}}{x^2 + \frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\eta}{\lambda}}\right)\right)$$

Pour la dernière partie, on rappelle que la dérivée de $\arctan(u)$ est $\frac{u'}{1+u^2}$
Autrement dit passons $x^2 + \frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\eta}{\lambda}$ sous forme canonique :

$$x^2 + \frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\eta}{\lambda} = (x + \frac{\mu}{2\lambda})^2 - \frac{\mu^2}{4\lambda^2} + \frac{\eta}{\lambda}$$

On a besoin d'une forme $1 + u^2$ pour l'intégration :

$$= \left(\frac{\eta}{\lambda} - \frac{\mu^2}{4\lambda^2}\right)\left(\frac{\left(x + \frac{\mu}{2\lambda}\right)^2}{\frac{\eta}{\lambda} - \frac{\mu^2}{4\lambda^2}} + 1\right)$$

$$= \left(\frac{\eta}{\lambda} - \frac{\mu^2}{4\lambda^2}\right)\left(\left(\frac{x + \frac{\mu}{2\lambda}}{\sqrt{\frac{\eta}{\lambda} - \frac{\mu^2}{4\lambda^2}}}\right)^2 + 1\right)$$

Il faudra aussi faire apparaître $u'$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\eta}{\lambda} - \frac{\mu^2}{4\lambda^2}}}$$

On écrit alors que :

$$\frac{-\frac{\mu}{\lambda} + 2\frac{\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\eta}{\lambda}}{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\mu}{\lambda}}}{x^2 + \frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\eta}{\lambda}} = \left(-\frac{\mu}{\lambda} + 2\frac{\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\eta}{\lambda}}{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\mu}{\lambda}}\right)\frac{1}{\left(\frac{\eta}{\lambda} - \frac{\mu^2}{4\lambda^2}\right)\left(\left(\frac{x+\frac{\mu}{2\lambda}}{\sqrt{\frac{\eta}{\lambda} - \frac{\mu^2}{4\lambda^2}}}\right)^2 + 1\right)}$$

$$= \frac{\left(-\frac{\mu}{\lambda}+2\frac{\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\eta}{\lambda}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\mu}{\lambda}}\right)}{\left(\frac{\eta}{\lambda}-\frac{\mu^2}{4\lambda^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\eta}{\lambda}-\frac{\mu^2}{4\lambda^2}}}\right)} \frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{\eta}{\lambda}-\frac{\mu^2}{4\lambda^2}}}}{\left(\frac{x+\frac{\mu}{2\lambda}}{\sqrt{\frac{\eta}{\lambda}-\frac{\mu^2}{4\lambda^2}}}\right)^2+1}$$

On peut maintenant trivialement calculer notre intégrale, c'est-à-dire :

$$\int_b^a \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\lambda x^2+\mu x+\eta}\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{\alpha}{\lambda}\left(x+\frac{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\mu}{\lambda}}{2}\left(\ln\left(x^2+\frac{\mu}{\lambda}x+\frac{\eta}{\lambda}\right)+\frac{\sqrt{\frac{\eta}{\lambda}-\frac{\mu^2}{4\lambda^2}}\left(-\frac{\mu}{\lambda}+2\frac{\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\eta}{\lambda}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\mu}{\lambda}}\right)}{\frac{\eta}{\lambda}-\frac{\mu^2}{4\lambda^2}}\arctan\left(\frac{x+\frac{\mu}{2\lambda}}{\sqrt{\frac{\eta}{\lambda}-\frac{\mu^2}{4\lambda^2}}}\right)\right)\right)\right]_b^a$$

$$= \left[\frac{\alpha}{\lambda}x\right]_a^b+\left[\alpha\frac{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\mu}{\lambda}}{2\lambda}\ln\left(x^2+\frac{\mu}{\lambda}x+\frac{\eta}{\lambda}\right)\right]_a^b+\left[\alpha\frac{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\mu}{\lambda}}{2\lambda}\frac{-\frac{\mu}{\lambda}+2\frac{\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\eta}{\lambda}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\mu}{\lambda}}}{\sqrt{\frac{\eta}{\lambda}-\frac{\mu^2}{4\lambda^2}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{\mu}{2\lambda}}{\sqrt{\frac{\eta}{\lambda}-\frac{\mu^2}{4\lambda^2}}}\right)\right]_a^b$$

# Chapitre 2

# Suites récurrentes type Fibonacci

## 2.1 La suite de Fibonacci

### 2.1.1 Introduction

La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} = (F_{n-1} + F_{n-2})_{n\in\mathbb{N}}$ est souvent un exemple très pertinent lorsqu'il s'agit de parler de complexité, en effet codée naïvement par sa définition, elle se calcule en complexité de temps $\mathcal{O}(2^n)$. Or, il est souvent illustré que son calcul n'est pas nécessairement exponentiel mais peut être calculé facilement en temps polynomial.

### 2.1.2 Équivalence avec une suite à deux variables

La suite de Fibonacci donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{array}{rcl} F_n & = & F_{n-1} + F_{n-2} \quad Si \quad n \geq 2 \\ F_1 & = & 1 \\ F_0 & = & 0 \end{array}$$

peut s'écrire sous la forme de deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liées par la relation :

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n & = & a_{n-1} \\ a_0 & = & 1 \\ b_0 & = & 0 \end{array}.$$

Par remplacement des expressions, on peut vérifier :

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & a_{n-1} + b_{n-1} \\ & = & a_{n-1} + a_{(n-1)-1} \\ & = & a_{n-1} + a_{n-2} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & a_0 + b_0 \\ & = & 1 + 0 \\ & = & 1 \end{array}.$$

Nous avons donc $F_0 = b_0$ et $F_n = a_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}^*$ et par conséquent équivalence entre nos suites et la suite de Fibonacci.

Cette relation de récurrence permet par conséquent d'écrire la suite de Fibonacci sous forme d'une suite à deux variables et la calculer linéairement avec un algorithme qui itère sur les éléments :

$$\begin{array}{rclcrcl} a, b & \leftarrow & 1, 0 & \Leftrightarrow & a_0, b_0 & = & 1, 0 \\ a, b & \leftarrow & a + b, a & \Leftrightarrow & a_n, b_n & = & a_{n-1} + b_{n-1}, a_{n-1} \end{array}.$$

### 2.1.3 Calcul en temps logarithmique

En réalité, cette relation linéaire peut aussi s'écrire sous forme matricielle, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et donc, ceci revient à une exponentiation matricielle, autrement dit :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Ici, nous avons à élever une matrice à une puissance donnée pour obtenir le résultat. Or, ceci se fait en complexité de temps $\mathcal{O}(\log(n))$ avec l'algorithme d'exponentiation rapide. Nous pouvons donc réduire le calcul du n-ième élément de la suite de Fibonacci à une exponentiation matricielle et donc en complexité de temps $\mathcal{O}(\log(n))$.

## 2.2 Et la suite ?

### 2.2.1 Introduction

Bien, nous avons montré que nous pouvions calculer les éléments de la suite de Fibonacci en temps logarithmique d'après une relation que j'ai exhibée, mais est-il possible de faire de même pour des suites plus générales ? Par exemple sur des suite récurrentes linéaires ?

### 2.2.2 Un exemple

Avant de partir sur un cas général, prenons l'exemple de la suite suivante :

$$q_n = q_{n-1} + 2q_{n-2} + 3q_{n-3} + 2 + 3n + n^2$$

avec $(q_0, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^3$.
Calculer cette suite va nous demander connaître pour chaque itération les 3 éléments précédents et être en mesure de calculer le polynôme $n \mapsto 2+3n+n^2$. Prenons l'ensemble $S = \left\{ \left((s_i)_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} | i \in [3] \right\}$ nos 2 suites de sauvegarde et la suite de calcul de l'expression. De sorte qu'à chaque itération nous calculons :

$$\begin{array}{rcl} (s_0)_n & = & (s_0)_{n-1} + 2\,(s_1)_{n-1} + 3\,(s_2)_{n-1} + 2 + 3n + n^2 \\ (s_1)_n & = & (s_0)_{n-1} \\ (s_2)_n & = & (s_1)_{n-1} \left(= (s_0)_{n-2}\right) \end{array}.$$

Cette relation permet un calcul en complexité de temps linéaire de l'expression, mais nous visons une complexité logarithmique. Pour que notre calcul se réduise à un calcul matriciel, nous devons trouver un moyen d'exprimer les éléments polynomiaux en fonction d'éléments précédents. Ceci se fait par exemple en écrivant que :

$$\begin{array}{rcl} (1) & = & (1) \\ (n+1) & = & (n) + (1) \\ (n+1)^2 & = & (n)^2 + 2 \cdot (n) + (1) \end{array}.$$

Dans cette représentation nous pouvons poser l'ensemble de suites $R = \left\{ \left((r_j)_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} | j \in [3] \right\}$ avec :

$$\begin{array}{rcl} (r_0)_n & = & (r_0)_{n-1} \\ (r_1)_n & = & (r_1)_{n-1} + (r_0)_{n-1} \\ (r_2)_n & = & (r_2)_{n-1} + 2 \cdot (r_1)_{n-1} + (r_0)_{n-1} \end{array}.$$

Ceci nous fait donc finalement la relation équivalente à l'expression itérative de $(q_n)_n$ par le système suivant :

$$\begin{array}{rcl} (s_0)_n & = & (s_0)_{n-1} + 2\,(s_1)_{n-1} + 3\,(s_2)_{n-1} + 2\,(r_0)_{n-1} + 3\,(r_1)_{n-1} + (r_2)_{n-1} \\ (s_1)_n & = & (s_0)_{n-1} \\ (s_2)_n & = & (s_1)_{n-1} \\ (r_0)_n & = & (r_0)_{n-1} \\ (r_1)_n & = & (r_1)_{n-1} + (r_0)_{n-1} \\ (r_2)_n & = & (r_2)_{n-1} + 2\cdot(r_1)_{n-1} + (r_0)_{n-1} \end{array}.$$

Notons simplement que notre vecteur d'initialisation est ici de la forme $\left(q_2, q_1, q_0, \cdot, \cdot, \cdot\right)$. De plus, le premier élément calculable par cette méthode est $q_3$, par conséquent nous commençons les suites de $R$ à $\left\{1, 3, 3^2 = 9\right\}$. D'où $\left(q_2, q_1, q_0, 1, 3, 9\right)$ le vecteur d'initialisation. Par suite, le calcul de $(q_n)_n$ sera donc $\forall n \in \mathbb{N}/\,[2]\; q_n = (s_0)_{n-2}$.

Plus simplement cette relation peut maintenant s'écrire :

$$\begin{pmatrix} (s_0)_n \\ (s_1)_n \\ (s_2)_n \\ (r_0)_n \\ (r_1)_n \\ (r_2)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (s_0)_{n-1} \\ (s_1)_{n-1} \\ (s_2)_{n-1} \\ (r_0)_{n-1} \\ (r_1)_{n-1} \\ (r_2)_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Notons que ceci est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} q_n \\ q_{n-1} \\ q_{n-2} \\ 1 \\ n+1 \\ (n+1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{n-1} \\ q_{n-2} \\ q_{n-3} \\ 1 \\ n \\ n^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, nous pouvons écrire que :

$$\begin{pmatrix} q_{n+2} \\ q_{n+1} \\ q_n \\ 1 \\ n+3 \\ (n+3)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s_0)_n \\ (s_1)_n \\ (s_2)_n \\ (r_0)_n \\ (r_1)_n \\ (r_2)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} (s_0)_0 \\ (s_1)_0 \\ (s_2)_0 \\ (r_0)_0 \\ (r_1)_0 \\ (r_2)_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} q_2 \\ q_1 \\ q_0 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Cette relation permet un calcul de notre suite en complexité de temps $\mathcal{O}\left(\log\left(n\right)\right)$. Ceci reste vrai car nous considérons la taille de la matrice comme constante (matrice carrée de taille du nombre d'éléments en rétrospection plus le degré incrémenté du polynôme fonction de $n$).

### 2.2.3 Transformation pour calcul en temps logarithmique

Nous chercherons à généraliser la méthode sur une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie avec $\alpha \in \mathbb{R}^k, \beta \in \mathbb{R}^p$, $f_{|[k]} \in \mathbb{R}^k$ (ici, je noterai $[n] = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$) par :

$$f_n = \sum_{i\in[k]} \alpha_i f_{n-1-i} + \sum_{j\in[p]} \beta_j n^j \quad \forall n \in \mathbb{N}/\,[k]\,.$$

Autrement dit dont l'expression demande la rétrospection sur $k$ éléments et pouvoir calculer un polynôme fonction de $n$ de degré au plus $p-1$. Nous avons vu dans l'exemple précédent que l'idée proposée est de trouver une expression linéaire qui exprime le vecteur des termes suivants en fonction des précédents. Pour ceci, je propose de prendre un ensemble de suites pour la sauvegarde des éléments précédents

$S = \left\{ \left( (s_i)_n \right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} | i \in [k] \right\}$ (éléments avec les coefficients $\alpha_i$) et une suite de construction des éléments polynomiaux $R = \left\{ \left( (r_j)_n \right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} | j \in [p] \right\}$ (éléments avec les coefficients $\beta_j$).

L'idée est que $\forall n \in \mathbb{N}, (s_i)_n = f_{k+n-i}, (r_j)_n = (k+n+1)^j$, les suites sont définies en fonction des éléments précédents par la récurrence :

$$\begin{array}{rcll} (s_0)_n & = & \sum\limits_{i\in[k]} \alpha_i (s_i)_{n-1} + \sum\limits_{j\in[p]} \beta_j n^j & \\ (s_i)_n & = & (s_{i-1})_{n-1} & \forall i \in [k] \,/\, \{0\} \\ (r_j)_n & = & \sum\limits_{e\in[j+1]} \binom{j}{e} (r_{j-e})_{n-1} & \forall j \in [p] \end{array}.$$

Pour mieux comprendre, la suite $\left((s_0)_n\right)_{n\in N}$ équivaut à l'expression de notre suite récurrente, $\left((s_i)_n\right)_{n\in N}$ $\forall i \in [k] \,/\, \{0\}$ équivaut à la mémoire de nos éléments précédents et $\left((r_j)_n\right)_{n\in N}$ $\forall j \in [p]$ correspond à la construction des éléments polynomiaux.
De plus, $\binom{j}{e} = \frac{j!}{e!(j-e)!}$ est le coefficient binomial $j$ parmi $p$ utilisé pour construire la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}.$$

Or, dans notre cas, ce qui nous intéresse c'est construire les $\left((n+1)^j\right)_{j\in[p]}$ en fonction des $\left(n^j\right)_{j\in[p]}$.
Là où la formule du binôme de Newton nous donne que :

$$(n+1)^j = \sum_{e=0}^{e=j} \binom{j}{e} n^e \cdot 1^{j-e} = \sum_{e=0}^{e=j} \binom{j}{e} n^e.$$

Par conséquent, en regardant notre expression récursive et en gardant en vue la représentation matricielle recherchée, nous pouvons remarquer nos suites de $S$ vont nous faire construire une matrice identité de taille $k-1$ et que nos suites de $R$ vont nous faire construire une matrice dont les coefficients forment un triangle de Pascal (coefficients binomiaux). Notre problème s'écrit donc sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} (s_0)_n \\ (s_1)_n \\ \vdots \\ (s_{k-1})_n \\ (r_0)_n \\ (r_1)_n \\ \vdots \\ (r_{p-1})_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} & \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{p-1} \\ & & & & 0 & & \cdots & & 0 \\ & & I_{k-1} & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & P_p & & \\ 0 & & \cdots & & 0 & & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (s_0)_{n-1} \\ (s_1)_{n-1} \\ \vdots \\ (s_{k-1})_{n-1} \\ (r_0)_{n-1} \\ (r_1)_{n-1} \\ \vdots \\ (r_{p-1})_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Où $I_{k-1}$ est la matrice identité de taille $(k-1)$ et $P_p$ est la matrice des coefficients binomiaux de taille $p$ telle que :

$$P_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \cdots & & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & & & \cdots & & \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & & & \cdots & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & & \cdots & & \vdots \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & & \cdots & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & p-2 & & \cdots & & & p-2 & 1 & 0 \\ \binom{p-1}{0} & \binom{p-1}{1} & & & \cdots & & & \binom{p-1}{p-2} & \binom{p-1}{p-1} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, notre récurrence peut s'exprimer sous forme d'une exponentiation matricielle, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} f_{n+k-1} \\ f_{n+k-2} \\ \vdots \\ f_n \\ 1 \\ n+k \\ \vdots \\ (n+k)^{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s_0)_n \\ (s_1)_n \\ \vdots \\ (s_{k-1})_n \\ (r_0)_n \\ (r_1)_n \\ \vdots \\ (r_{p-1})_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} & \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{p-1} \\ & & & & 0 & & \cdots & & 0 \\ & & I_{k-1} & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & P_p & & \\ 0 & & \cdots & & 0 & & & & \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} f_{k-1} \\ f_{k-2} \\ \vdots \\ f_0 \\ 1 \\ k \\ \vdots \\ k^{p-1} \end{pmatrix}.$$

Sous cette forme, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il est donc possible de calculer $f_n$ en une complexité de temps $\mathcal{O}((k+p)^{\epsilon} \log(n))$ avec $\epsilon \geq 2$ la constante liée à la complexité de la méthode utilisée pour le produit matriciel dans le calcul.