Table des matières

1 Loi binomiale **1**
1.1 Schéma de Bernoulli 1
1.2 Définition 2
1.2.1 Épreuves de Bernoulli 2
1.2.2 Variable aléatoire 2
1.2.3 Loi binomiale 2
1.3 Triangle de Pascal 3
1.3.1 Inéquation sur loi binomiale 5
1.4 Espérance 5
1.4.1 Espérance schéma de Bernoulli 5
1.4.2 Espérance loi binomiale 6
1.5 Variance 6
1.5.1 Schéma de Bernoulli 6
1.5.2 Loi binomiale 7

1 Loi binomiale

1.1 Schéma de Bernoulli

Un schéma de Bernoulli se pose dans une situation où nous pouvons soit réussir avec une probabilité p, soit échouer. Dans ce cas nous parlerons de p comme la **probabilité de succès** et de $1-p$ comme la probabilité d'échec.

Un schéma de Bernoulli se posera souvent par l'événement S : *succès* et son contraire l'événement E : *échec* avec :

$$\mathbb{P}(S) = p \quad et \quad \mathbb{P}(E) = 1 - p$$

En général, les jeux peuvent se représenter à l'aide d'un schéma de Bernoulli.

Exemple 1. Par exemple, si un joueur choisit une face d'un dé à six faces non pipé et que ce dé est lancé. Il a une probabilité $p = \frac{1}{6}$ de réussir et une probabilité $1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ d'échouer.

Exemple 2. Un exemple plus concret peut être celui du Loto de la française des jeux. En effet, en jouant une grille, le joueur a une probabilité de $p = \frac{1}{19\ 068\ 840}$ de réussir à gagner un gain et une probabilité $1 - p = 1 - \frac{1}{19\ 068\ 840} = \frac{19\ 068\ 839}{19\ 068\ 840}$ de ne pas gagner le gain mis en jeu.

1.2 Définition

1.2.1 Épreuves de Bernoulli

Lorsque nous répétons un même schéma de Bernoulli, nous parlerons d'épreuves de Bernoulli. Si ces épreuves sont répétées un nombre de fois n donné, nous exprimerons cette succession d'épreuves indépendantes par une **loi binomiale**.

Une loi binomiale est donnée par un nombre d'épreuves successives indépendantes n et une probabilité de succès à chaque épreuve p.

Exemple 3. Par exemple, jouer au Loto de la française des jeux 42 fois se traduit par une loi binomiale de paramètres $n = 42$ et de probabilité de succès $p = \frac{1}{19\ 068\ 840}$.

1.2.2 Variable aléatoire

Pour modéliser une telle expérience, nous introduisons une **variable aléatoire** X. X correspond à l'ensemble de valeurs que peuvent prendre les résultats de l'expérience aléatoire. Dans le cas de notre loi binomiale, X peut réaliser de 0 (si toutes les épreuves échouent) jusqu'à n succès (si toutes les épreuves réussissent). La probabilité que X réalise une issue donnée k sera donnée comme :

$$\mathbb{P}\left(X = k\right)$$

1.2.3 Loi binomiale

Nous noterons une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p comme il suit :

$$X \sim \mathcal{B}in\left(n, p\right)$$

Dans ce cas, la probabilité que X réalise un nombre de succès k après n épreuves de Bernoulli de paramètre p successives indépendantes sera donné par

$$\mathbb{P}\left(X = k\right) = \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k}$$

1.3 Triangle de Pascal

La loi binomiale fait apparaître le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ qui se lit k parmi n. Il se définit comme :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

et par la récurrence suivante :

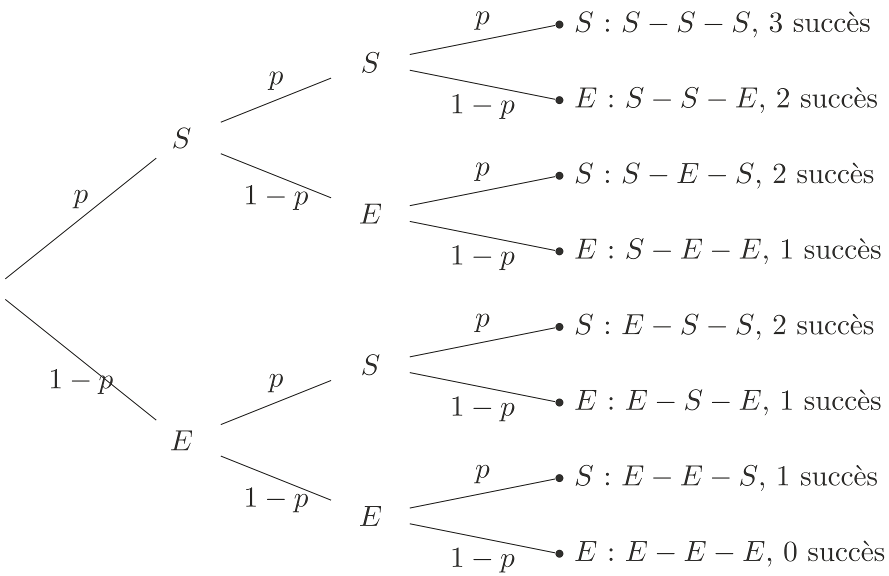
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Et vaut 0 pour tout k strictement inférieur à 0 ou strictement supérieur à n. Les coefficients binomiaux peuvent s'illustrer à l'aide du triangle de Pascal, donné comme il suit :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & + & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & + & \binom{2}{1} & + & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & + & \binom{3}{1} & + & \binom{3}{2} & + & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & + & 1 & & & \\
 & & 1 & + & 2 & + & 1 & & \\
 & 1 & + & 3 & + & 3 & + & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Nous pouvons vérifier que si nous créons un arbre de probabilités de n épreuves et que nous nous intéressons au nombre de k succès, le nombre de chemins donnant ces k succès seront modélisés par le coefficient binomial $\binom{n}{k}$. De même la probabilité sur de réaliser chaque nœud de cet arbre sera $p^k\left(1-p\right)^{n-k}$ donc la multiplication des probabilités des branches suivies : k succès et $n-k$ échecs.

Exemple 4. En illustration, un arbre de probabilités qui modélise la situation pour 3 épreuves successives indépendantes de probabilité de succès p modélisé par l'événement de succès S et d'échec E :



Nous remarquons, en effet, que nous avons :

— 1 chemin qui donne 0 succès avec une probabilité $\left(1-p\right)^3$ de le réaliser.

— 3 chemins qui donnent 1 succès avec une probabilité $p\left(1-p\right)^2$ de réaliser chacun.

— 3 chemins qui donnent 2 succès avec une probabilité $p^2\left(1-p\right)$ de réaliser chacun.

— 1 chemin qui donne 3 succès avec une probabilité p^3 de le réaliser.

1.3.1 Inéquation sur loi binomiale

Dans le cas où on souhaite obtenir la probabilité que la variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètre (n, p) soit telle que $X \leqslant k$, sa probabilité s'exprimera comme il suit :

$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \cdots + \mathbb{P}(X = k) = \sum_{i=0}^{i=k} \mathbb{P}(X = i)$$

1.4 Espérance

L'espérance d'une variable aléatoire X pouvant prendre les valeurs $\{k_0, k_1, \ldots, k_n\}$ se note $\mathbb{E}[X]$ et correspond à la moyenne pondérée des valeurs que prend X. L'espérance se donne comme il suit :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{i=n} (k_i \times \mathbb{P}(X = k_i))$$

À noter que dans le cadre de ce cours, il n'est pas demandé de savoir calculer une espérance d'une variable aléatoire quelconque mais d'appliquer les formules des espérances données pour les lois suivantes.

1.4.1 Espérance schéma de Bernoulli

Si X est une variable aléatoire qui suit un schéma de Bernoulli, X peut prendre les valeurs 0 (échec) avec une probabilité de $1 - p$ et 1 (succès) avec une probabilité de p. Autrement dit son espérance est :

$$\mathbb{E}[X] = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

Donc, l'espérance d'un schéma de Bernoulli vaut p.

1.4.2 Espérance loi binomiale

Si $X \sim \mathcal{B}in\left(n, p\right)$, alors $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ où les X_i sont des épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p indépendantes. En effet, on ajoute 1 si l'épreuve réussi et 0 si elle échoue ce qui nous donne le nombre de succès dans le cas d'une loi binomiale.

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbb{E}\left[X_i\right] = \sum_{i=1}^{i=n} p = np$$

Donc, l'espérance d'une loi binomiale vaut np.

1.5 Variance

La variance d'une variable aléatoire correspond à une distance à l'espérance de celle-ci. Quand nous parlons de variance, nous parlons aussi d'écart type où l'écart type est la racine carré de la variance. L'écart type est représentatif de l'écartement des différentes issues à la moyenne. La variance se calcule comme il suit :

$$Var\left[X\right] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left[X\right]\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2$$

Et l'écart type :

$$\sigma\left[X\right] = \sqrt{Var\left[X\right]}$$

1.5.1 Schéma de Bernoulli

Dans le cas où X suit un schéma de Bernoulli, la variance de X est donnée par

$$Var\left[X\right] = p\left(1 - p\right)$$

En complément de preuve :

$$Var\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2 = \left(0^2 \times \mathbb{P}\left(X = 0\right) + 1^2 \times \mathbb{P}\left(X = 1\right)\right) - p^2$$

$$Var\left[X\right] = \left(0^2 \times \left(1 - p\right) + 1^2 \times p\right) - p^2 = p - p^2 = p\left(1 - p\right)$$

1.5.2 Loi binomiale

Dans le cas où X suit une loi binomiale de paramètres n et p, sa variance est donnée comme il suit :

$$Var\left[X\right] = np\left(1 - p\right)$$

Synthèse

Schéma de Bernoulli est donné avec probabilité de succès p et d'échec $1 - p$.

Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ k parmi n comptent le nombre de cas possibles où nous obtenons k succès pour n essais et forment le triangle de Pascal. Il se définissent par les propriétés suivantes :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

La loi binomiale est donnée par une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}in\left(n, p\right)$ qui compte le nombre de succès pour n épreuves de Bernoulli successives de paramètre p indépendantes. La probabilité d'avoir k succès est donnée par :

$$\mathbb{P}\left(X = k\right) = \binom{n}{k} p^k \left(1 - p\right)^{n-k}$$

La probabilité d'avoir au plus k succès (entre 0 et k) est donné par la somme des probabilités vérifiant l'inéquation :

$$\mathbb{P}\left(X \leqslant k\right) = \sum_{i=0}^{i=k} \mathbb{P}\left(X = i\right)$$

Une astuce est qu'il est possible d'utiliser le contraire pour calculer la probabilité d'avoir strictement au moins k succès :

$$\mathbb{P}\left(X > k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leqslant k\right)$$

L'espérance d'un schéma de Bernoulli est p. L'espérance d'une loi binomiale est

$$\mathbb{E}\left[X\right] = np$$

La variance d'un schéma de Bernoulli est $p\left(1 - p\right)$. La variance d'une loi binomiale est

$$Var\left[X\right] = np\left(1 - p\right)$$

L'écart type se déduit de la variance par :

$$\sigma\left[X\right] = \sqrt{Var\left[X\right]}$$