Table des matières

1 Probabilités

1.1 Introduction

1.1.1 Univers

Les probabilités sont l'ensemble des méthodes qui permettent de représenter une situation aléatoire par un modèle mathématique.

Définition 1 (Univers). Pour une expérience aléatoire, il existe des issues : résultats de cette expérience. Si ces issues sont notées $i_1, i_2, \cdots, i_n$ alors l'ensemble de celles-ci forme un univers noté Ω tel que :

$$\Omega = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}.$$

Les différentes issues $\{i_1\}, \{i_2\}, \cdots, \{i_n\}$ de cette expérience sont les événements élémentaires.

La probabilité d'un univers est toujours 1, autrement dit 100% des issues appartiennent à l'univers :

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Exemple 1. Si le modèle probabiliste étudie les résultats d'un lancer de dé, l'ensemble des issues est donné par la valeurs allant de 1 à 6. Autrement dit l'univers est le suivant :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Propriété 1. Si A est un événement de l'univers Ω, la probabilité que l'événement A soit vérifié est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le compose.

1.1.2 Équiprobabilité

Lorsque chaque issue a autant de chance d'arriver, nous parlons d'équiprobabilité. L'exemple du dé illustre une situation d'équiprobabilité.

Définition 2. Pour $\Omega = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ avec n le nombre d'issues, la probabilité d'obtenir un résultat i_k est donnée par

$$\mathbb{P}(i_k) = \frac{1}{\textit{Nombre d'issues dans l'univers}}.$$

De même pour un événement A, sa probabilité est donnée par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\textit{Nombre d'issues favorables à } A}{\textit{Nombre d'issues dans l'univers}}.$$

Exemple 2. Dans le cas du dé, l'ensemble de probabilités peut être illustré comme il suit :

Issue : $i_k =$	1	2	3	4	5	6
Probabilité : $\mathbb{P}(i_k) =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

.

Si A est l'événement "L'issue est paire", alors $A = \{2, 4, 6\}$, le nombre d'issues favorables à A est 3. Le nombre d'issues de l'univers est 6 donc :

$$\mathbb{P}(i_k) = \frac{\textit{Nombre d'issues favorables à } A}{\textit{Nombre d'issues dans l'univers}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

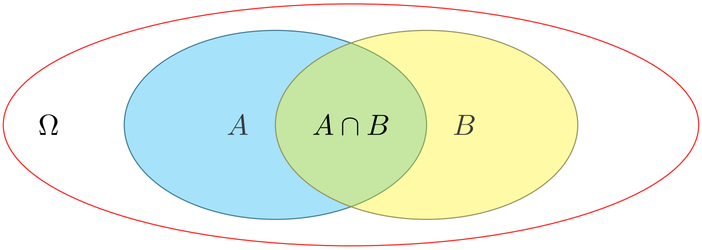
Autrement dit, nous avons une chance sur deux de tomber sur une issue paire.

1.2 Intersection, réunions et événements contraires

Lorsque nous considérons deux événements A et B, il est possible d'y appliquer des opérations booléennes.

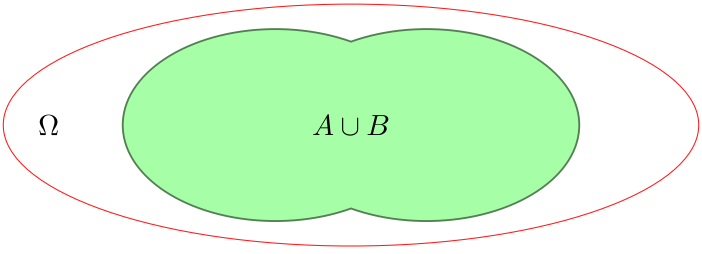
1.2.1 Intersection

Définition 3. Une première opération est l'intersection d'événements, autrement dit on note $A \cap B$ (A inter B), celui-ci est vérifié si l'issue est à la fois favorable à A **ET** à B. Sur la figure suivante, $A \cap B$ est représenté en vert.



1.2.2 Réunion

Définition 4. Une seconde opération est la réunion $A \cup B$ (A union B) qui correspond à l'événement tel qu'une issue lui est favorable si est favorable soit à A, soit à B, soit aux deux, autrement dit A **OU** B.



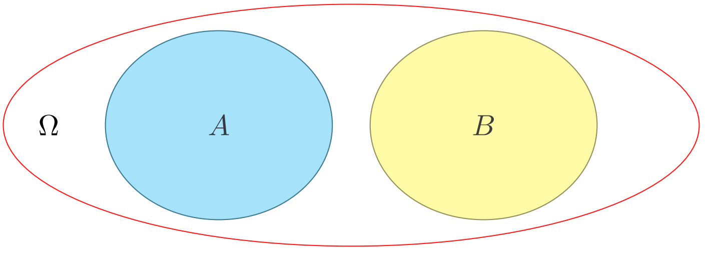
Propriété 2. La probabilité de la réunion de deux événements A et B peut être donnée depuis les probabilités de A, B et $A \cap B$. En effet, c'est la somme de la probabilité de A et celle de B à laquelle on retire la probabilité de l'intersection de A et B puisqu'elle a été comptée deux fois :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Propriété 3. Dans le cas où A et B n'ont aucune issue commune qui leur est favorable. Nous dirons que A et B sont **incompatibles** et donc la probabilité qu'une issue puisse être favorable aux deux est nulle : $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ et donc pour A et B **incompatibles** :

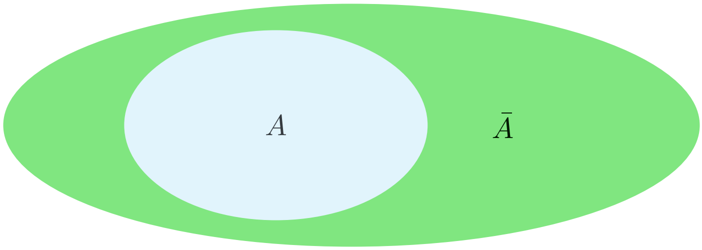
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

À noter que dans ce cas nous pouvons écrire cette incompatibilité de la manière suivante : $A \cap B = \emptyset$ qui indique que l'intersection de A et B est vide. Cette configuration est illustrée sur la figure suivante :



1.2.3 Complémentaire

Définition 5. Lorsque l'on souhaite avoir les issues défavorables à un événement A, il est possible de passer au contraire de A noté $\bar{A}$ qui est l'ensemble des issues qui ne sont pas favorables à A et est illustré en vert sur la figure suivante :



La probabilité de l'événement contraire $\bar{A}$ peut être exprimée depuis la probabilité de l'événement A comme étant la probabilité d'être une issue de l'univers à laquelle on retire la probabilité d'être une issue de A, soit :

$$\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A\right).$$

Exemple 3. Dans un jeu de cartes, nous avons 52 cartes au total divisées groupe de 13 cartes par symbole et sur lesquelles figure un personnage sur 3 cartes d'un même symbole.

	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	*Total*
Effectif sans personnage	10	10	10	10	40
Effectif avec personnage	3	3	3	3	12
Effectif total	13	13	13	13	52

.

Si $\mathbb{P}\left(\clubsuit\right) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ est la probabilité de tirer un trèfle et $\mathbb{P}\left(Personnage\right) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$ est la probabilité de tirer un personnage, alors la probabilité de tirer une carte trèfle avec un personnage est :

$$\mathbb{P}\left(\clubsuit \cap Personnage\right) = \frac{3}{52}.$$

Si maintenant nous souhaitons une carte trèfle ou un personnage, nous calculons la réunion de ces événements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\clubsuit \cup Personnage\right) &= \mathbb{P}\left(\clubsuit\right) + \mathbb{P}\left(Personnage\right) - \mathbb{P}\left(\clubsuit \cap Personnage\right)\\ &= \tfrac{13}{52} + \tfrac{12}{52} - \tfrac{3}{52}\\ &= \tfrac{13+12-3}{52}\\ &= \tfrac{22}{52}\\ &= \tfrac{11}{26}\end{aligned}.$$

La probabilité de ne pas tirer de carte trèfle est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bar{\clubsuit}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\clubsuit\right)\\ &= 1 - \tfrac{1}{4}\\ &= \tfrac{4}{4} - \tfrac{1}{4}\\ &= \tfrac{4-1}{4}\\ &= \tfrac{3}{4}\end{aligned}.$$

2 Probabilités conditionnelles

2.1 Définition

Définition 6. Pour A et B deux événements d'un univers Ω et B un événement tel que sa probabilité soit non-nulle ($\mathbb{P}(B) \neq 0$). Sachant que l'événement B a été réalisé, la probabilité que l'événement A se réalise est donnée par :

$$\mathbb{P}_B\left(A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A \cap B\right)}{\mathbb{P}\left(B\right)}.$$

Propriété 4 (Formule des probabilités composées). Depuis la formule en définition 6, on peut en déduire :

$$\mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \mathbb{P}_B\left(A\right) \times \mathbb{P}\left(B\right).$$

À noter que si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, nous avons aussi :

$$\mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \mathbb{P}_A\left(B\right) \times \mathbb{P}\left(A\right).$$

Exemple 4. Dans une classe de 11 élèves, nous avons 6 filles et 5 garçons. Parmi les filles 3 aiment les mathématiques et parmi les garçons 2 aiment les mathématiques. La situation peut être illustrée par la table suivante :

	Filles	*Garçons*	*Total*
Effectif présent	6	5	11
Effectif qui aime les mathématiques	3	2	5
Effectif qui aime l'art	4	2	6
Effectif qui aime l'informatique	1	4	5

Sachant qu'une *Fille* a été choisie, la probabilité qu'elle "aime les mathématiques" est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\textit{"Fille"}}\left(\textit{"aime les mathématiques"}\right) &= \frac{\mathbb{P}(\textit{"Fille"} \cap \textit{"aime les mathématiques"})}{\mathbb{P}(\textit{"Fille"})} \\ &= \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}.$$

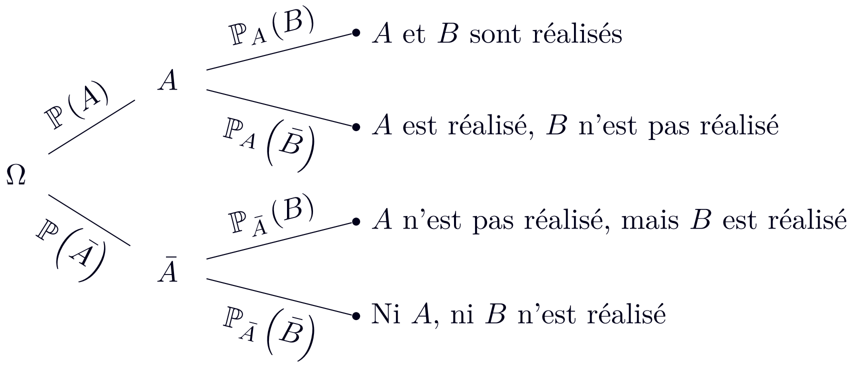
Nous constatons que $\mathbb{P}\left(\textit{"aime les mathématiques"}\right) = \frac{5}{11}$ des élèves aiment la est. La probabilité de choisir une fille et qu'elle aime les mathématiques est donc :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\textit{"Fille"} \cap \textit{"aime les mathématiques"}\right) \\ &= \mathbb{P}_{\textit{"Fille"}}\left(\textit{"aime les mathématiques"}\right) \times \mathbb{P}\left(\textit{"Fille"}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{6}{11} \\ &= \frac{6}{22} \\ &= \frac{3}{11}\end{aligned}.$$

2.2 Arbre de probabilités

À partir des probabilités conditionnelles, nous pouvons construire un arbre de probabilité. Sur celui-ci, on donne pour chaque branche la probabilité de l'emprunter et pour chaque jonction ou nœud l'événement réalisé.

Définition 7. Pour A et B deux événements de Ω, la situation où on regarde la réalisation de A, puis la réalisation de B peut se modéliser par l'arbre suivant :



Propriété 5. La somme des probabilités associées aux branches d'un arbre font 1, par exemple :

— $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1$

— $\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A\left(\bar{B}\right) = 1$

En effet, un événement et son contraire couvrent tout l'univers : $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $B \cup \bar{B} = \Omega$.

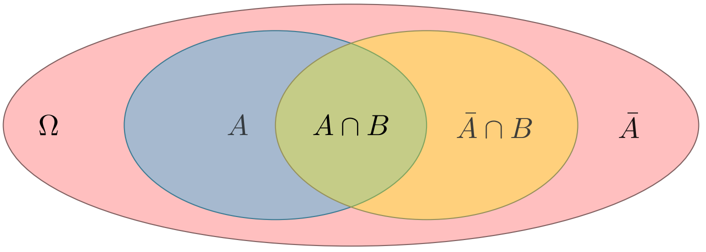
Propriété 6. La probabilité au bout d'une feuille est donnée par le produit des probabilités de ses branches (et suit la formule des probabilités composées) :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Définition 8 (Formule des probabilités totales). Un événement B peut être découpé par un événement A et son contraire par la formule suivante :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(B \cap \bar{A}\right) + \mathbb{P}(B \cap A).$$

Cette découpe peut être visualisée comme illustré sur la figure suivante :



2.3 Indépendance

Lorsque deux événements peuvent sans que la réalisation de l'un ait une influence sur la probabilité de réalisation de l'autre, nous parlons d'indépendance. L'indépendance se traduit mathématiquement par les assertions suivantes :

Définition 9. Soient A et B deux événements de probabilité non-nulle, alors nous avons :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A),$$
$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B).$$

De même ces deux événements sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Exemple 5. Prenons deux dés à six faces : un dé noir et un dé blanc. Soit A_i est l'événement "Nous lisons la face i sur le dé noir" et B_j l'événement "Nous lisons la face j sur le dé blanc". Alors nous pouvons construire la table des probabilités pour chaque intersection comme la suivante :

dé blanc \ dé noir	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ceci fait donc que pour tout A_i et tout B_j, d'après la table :

$$\mathbb{P}\left(A_i \cap B_j\right) = \frac{1}{36}$$

et

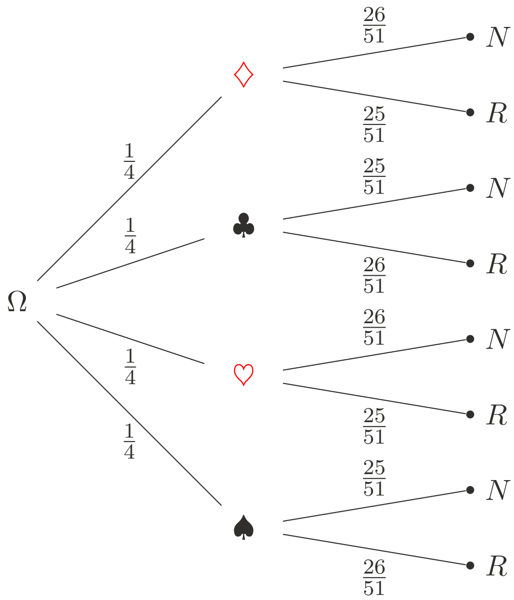
$$\mathbb{P}\left(A_i\right) \times \mathbb{P}\left(B_j\right) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Nous avons :

$$\mathbb{P}\left(A_i \cap B_j\right) = \mathbb{P}\left(A_i\right) \times \mathbb{P}\left(B_j\right),$$

donc les événements A_i et B_j sont indépendants.

Exemple 6. Prenons un jeu de 52 cartes, soient $\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$ les événements qui correspondent aux symboles que l'on peut piocher, R : "Piocher une carte de couleur Rouge" et N : "Piocher une carte de couleur Noire". Nous proposons de tirer une carte sans remise (on la garde en main) et de regarder son symbole, puis de tirer à nouveau une carte et regarder sa couleur. Cette situation se modélise par l'arbre suivant :



D'après la formule des probabilités totale :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(R\cap\spadesuit)+\mathbb{P}(R\cap\heartsuit)+\mathbb{P}(R\cap\clubsuit)+\mathbb{P}(R\cap\diamondsuit)\\
&= \mathbb{P}_{\spadesuit}(R)\,\mathbb{P}(\spadesuit)+\mathbb{P}_{\heartsuit}(R)\,\mathbb{P}(\heartsuit)+\mathbb{P}_{\clubsuit}(R)\,\mathbb{P}(\clubsuit)+\mathbb{P}_{\diamondsuit}(R)\,\mathbb{P}(\diamondsuit)\\
&= \tfrac{26}{51}\times\tfrac{1}{4}+\tfrac{25}{51}\times\tfrac{1}{4}+\tfrac{26}{51}\times\tfrac{1}{4}+\tfrac{25}{51}\times\tfrac{1}{4}\\
&= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{2\times 26+2\times 25}{51}\right)\\
&= \tfrac{51}{102}\\
&= \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On peut calculer $\mathbb{P}(\heartsuit\cap R)$ comme ce qui suit :

$$\mathbb{P}(\heartsuit\cap R)=\mathbb{P}_{\heartsuit}(R)\,\mathbb{P}(R)=\frac{25}{51}\times\frac{1}{4}=\frac{25}{204}$$

et comparer avec $\mathbb{P}(\heartsuit)\times\mathbb{P}(R)$:

$$\mathbb{P}(\heartsuit)\times\mathbb{P}(R)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=\frac{102}{816}\neq\frac{100}{816}=\frac{25}{204}=\mathbb{P}(\heartsuit\cap R)\,.$$

En effet $\mathbb{P}(\heartsuit)\times\mathbb{P}(R)\neq\mathbb{P}(\heartsuit\cap R)$ donc $\heartsuit$ et R ne sont pas indépendants.