Généralisation en dimension quelconque des noyaux critiques et des ensembles P-simples sur les images binaires par les ensembles de polytopes

Compte rendu d'articles

UNIVERSITÉ PARIS-EST MARNE-LA-VALLÉE

Kevin Trancho
Master Informatique 2ème année
Spécialité Sciences de l'image
Année 2018 - 2019

GASPARD - MONGE LABORATOIRE D'INFORMATIQUE

1 *Contexte*

Dans l'analyse d'une image, il est souvent intéressant d'en extraire un squelette topologique dans le but d'obtenir d'obtenir l'aspect général ainsi que les différentes caractéristiques topologiques. Pour ceci, une notion à laquelle nous nous sommes intéressé est celle des points simples, qui sont les points que l'on peut effacer de l'image en conservant la topologie de l'objet étudié, ceci dans un premier temps dans les images en 2D [Rosenfeld, 1970], puis plus tard dans la littérature dans des grilles 3D [Morgenthaler, 1981] mais aussi 4D [Kong, 1993].

Ces travaux ont conduit à étudier des algorithme efficaces pour obtenir ces squelettes topologiques [Bertrand and Couprie, 2009] ainsi que l'intérêt pour des notions telles que les points P-simples [Bertrand, 1995] ou plus récemment les noyaux critiques [Bertrand, 2007].

Les travaux étudiés dans ce compte rendu sont principalement ceux de Kong [Kong, 2017] [Kong, 2019] dont le travail par une approche basée sur des ensembles de polytopes généralise les notions établies par Bertrand [Bertrand, 2007] sur les noyaux critiques et les ensembles P-simples [Bertrand, 1995] dans les grilles cartésiennes à des ensembles plus généraux. Le grand intérêt des travaux de [Kong, 2017] est qu'ils offrent la possibilité de généraliser des méthodes efficaces pour l'affinement d'un squelette basé sur les noyaux critiques préservant la topologie qui ont été massivement étudiées par Bertrand et Couprie [Bertrand and Couprie, 2008] [Bertrand and Couprie, 2014] [Bertrand and Couprie, 2015] [Couprie and Bertrand, 2016].

Je propose dans ce compte rendu d'étudier les différents concepts établis par [Bertrand, 2007] tout en donnant une explication sur leur généralisation par [Kong, 2017] [Kong, 2019]. Pour ceci je propose d'illustrer ma compréhension de ces notions sur un complexe de dimension 2 dans une grille cartésienne que je compléterai souvent par une explication de sa généralisation si nécessaire.

2 *Prérequis*

Nous nous placerons dans le cas d'images binaires, c'est-à-dire d'une application qui aux points d'un espace associe des valeurs dans $\{0, 1\}$. Bien souvent nous nous plaçons dans des grilles cartésiennes, autrement dit dans des espaces de la forme $\mathbb{Z}^n$, où chaque point peut être vu comme un pixel dans $\mathbb{Z}^2$ ou encore un voxel dans $\mathbb{Z}^3$. Pour compléter cette notion et analyser la topologie d'une image, il est possible d'enrichir notre modèle car en effet, un pixel est en réalité un carré, ce carré a des arêtes et ces arêtes sont définies par deux points ce qui a conduit à imaginer nos grilles cartésiennes sous l'idée qu'un sommet est une 0-face, une arête est une 1-face, une face est une 2-face et même généraliser en dimension supérieure où un volume est une 3-face et ainsi de suite (Illustré en figure 1).

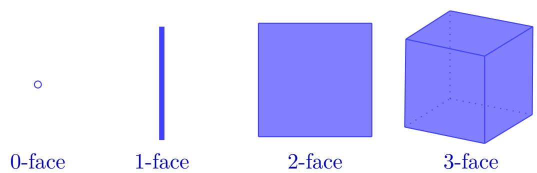


FIGURE 1 – illustration des n-faces

Ainsi ce que nous noterons être un n-cellule est en réalité l'union d'une n-face et de ses k-faces composantes pour $k < n$. Dans le même esprit [Kong, 2017] propose une généralisation de cette notion de n-face énoncée dans les grilles cartésiennes. Son approche s'appuie sur l'idée de prendre pour éléments atomiques des polytopes (pouvant être vu comme l'enveloppe convexe de points ou l'intersection d'hyperplans). Je propose une illustration de ce concept en figure 2, où j'ai choisi pour élément dans $\mathbb{R}^2$ un pentagone et une généralisation dans $\mathbb{R}^3$ par un dodécaèdre. Notons qu'il est possible de retrouver la généralisation de la notion de cellule dans les travaux de Kong où pour une n-face $\mathcal{S}$, sa cellule associée est donnée par $\bigcup \mathcal{S}$ qui représente l'union d'un polytope et ses composantes de plus faible degré.

Notons que tout comme une image cartésienne en 2D est souvent vue comme un regroupement de pixels, nous pouvons généraliser cette notion en considérant une image en dimension n comme une union de polyèdres et/ou de polytopes (un polyèdre étant une union de polytopes par exemple). Si ma compréhension de la présentation de [Kong, 2019] est correcte, la généralisation des n-faces peut aussi être définie dans la littérature par les $\mathcal{F}-$intersection pour $\mathcal{F}$ une collection de polyèdres. Un ensemble de cellules sera noté un *complexe*. Même si l'ensemble traité X n'est pas un complexe, il est possible de le compléter en transformant l'ensemble de ses n-faces en les n-cellules associées par une opération de *fermeture*, ce que nous noterons X^- comme illustré en figure 3. De même une notion intéressante est aussi celle des faces principales, souvent trouvées dans la littérature sous le nom de *facets*. Les faces principales sont les faces de plus haut degré dans l'inclusion de leur cellule, autrement dit, ce sont les faces telles qu'il n'existe pas de face de plus grand degré dont elle soit un élément, que ce se déduit aussi d'une autre appellation : *inclusion-maximal cell*, pour les caractériser. Nous noterons l'ensemble des faces principales de X par X^+ (cf. figure 3).

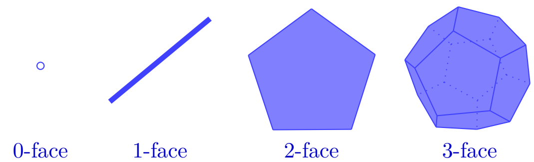


FIGURE 2 – illustration des n-faces sur la base de polytopes

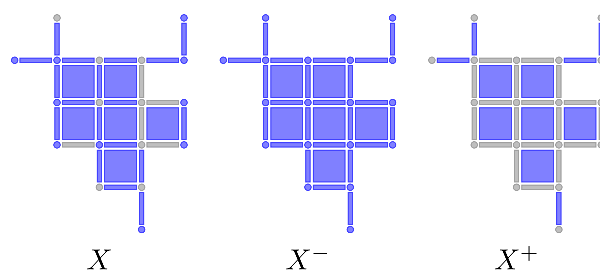


FIGURE 3 – illustration des n-faces sur la base de polytopes

Dans la suite du document nous nous intéresserons au cas d'images définies depuis des *complexes*, ceci pour discuter des méthodes d'affinement d'une image binaire tout en préservant sa topologie.

3 *Points simples*

Le grand intérêt des notions présentées précédemment est de travailler sur des ensembles depuis lesquels nous allons pouvoir parler d'affinement d'une image et y vérifier la préservation de la topologie. Pour affiner une image, nous allons chercher à *supprimer* des composantes de l'image, un point qui peut être effacé, c'est-à-dire que sa valeur peut être passée de 1 à 0 sur l'image sans changer la topologie de l'image est dit *point simple*. [Kong, 2019] propose une vision intéressante plus générale de la notion de *ensemble simple* (ici, un regroupement de points simples). Car en effet, si un ensemble S est *simple* dans une image I, alors il existe une déformation continue de $\bigcup I$ en $\bigcup (I \setminus S)$ et nous diront que cet ensemble est donc *homology simple* ce qui fait le lien entre la notion de *point simple* dans les grilles cartésiennes et celle définie sur les polyèdres. De plus si une déformation continue qui préserve la topologie existe entre deux ensemble, nous parlerons d'équivalence homotopique entre ces ensembles. Notons que cette notion de déformation continue induit la non-apparition de trous, c'est-à-dire que pour tout $k \leq n$ les classes des k-cycles homologiques sont conservées, c'est-à-dire que si deux cycles étaient d'une même classe, ils se déforment l'un en l'autre dans $\bigcup I$ et ceci doit toujours être vrai s'ils existent dans $\bigcup (I \setminus S)$. De même, si une classe de k-cycles homologiques existe dans $\bigcup I$, alors cette classe a aussi sa correspondance dans $\bigcup (I \setminus S)$ ce qui prévient de la séparation de deux composants, la fusion de trous ou encore la disparition d'un composant.

Une notion intéressante qui fait écho aux points simples est celle du détachement d'un complexe. En effet, nous souhaitons supprimer les 'ensembles *simples*' d'un complexe, dans l'esprit que le détachement de cet ensemble du complexe conduise à une équivalence homologique. L'opération de détachement s'applique entre un

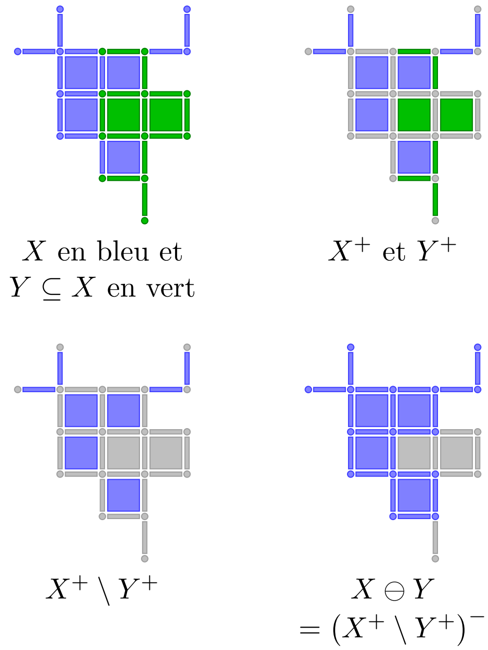


FIGURE 4 – Illustration du procédé de détachement d'un sous-complexe Y d'un complexe X

complexe Y sous-ensemble d'un complexe X et X. Le résultat comme illustré en figure 4 conduit à obtenir un complexe dont la partie qui concerne Y a été effacée de X.

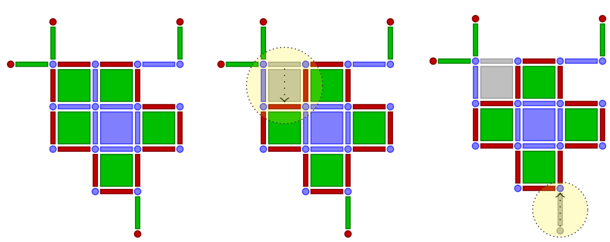
Pour affiner un ensemble en supprimant ses composants en parallèle, une définition qui offre cette possibilité est celle des points *P-simples* [Bertrand, 1995] généralisée par la notion d'ensemble *héréditairement homologiquement simple*. Ces notions veulent simplement dire que tout sous-ensemble d'un tel ensemble est aussi *homologiquement simple*. Notons que [Kong, 2019] avance des résultats intéressants sur cette théorie en introduisant la notion d'un ensemble *séquentiellement homologiquement simple* qui implique qu'il existe une partition ordonnée de cet ensemble telle que un ensemble de cette suite d'éléments est *homologiquement simple* dans l'ensemble *séquentiellement homologiquement simple* privé des ensembles précédents. Là où ce résultat est particulièrement intéressant est que la notion de *séquentiellement homologiquement simple* est équivalente à la notion de *héréditairement homologiquement simple* et ces notions conduisent de même à une équivalence avec le fait que tout élément de la partition ordonnée d'un tel ensemble est *homologiquement simple* dans cet ensemble privé des éléments précédents. Ce qui illustre d'un point de vue différent l'intérêt des points P-*simples* pour l'affinement en parallèle.

4 *Contraction*

Nous avons parlé d'équivalence homologique entre deux ensembles, dans cette partie nous présenterons une représentation du fait qu'il existe un déformation continue d'un ensemble dans l'autre.

Dans un premier temps, la notion qui nous intéresse est celle de *paires libres*. Dire qu'une paire $\{f, g\}$ est *libre* veut dire que f est la seule n-face principale qui contienne la $(n-1)$-face g. Dans ce type de configuration nous appellerons les faces principales f qui les *border-faces* et les faces associées g les *free-faces*.

L'intérêt principal de cette notion est que ceci implique qu'il est possible de *contracter* (*collapse* dans la littérature) f par g comme illustré en figure 5. Autrement dit, on peut imaginer une déformation continue de g vers $f \setminus g$. Notons que cette opération conserve la topologie d'un complexe X si la paire $\{f, g\}$ est une paire libre de X et sera qualifiée de *collapse élémentaire*.



paires libres (vert : *border-faces*) (rouge : *free-faces*) — *collapse* d'une paire 2-face et 1-face — *collapse* d'une paire 1-face et 0-face

FIGURE 5 – Illustration des paires libres, *border-faces*, faces libres et d'opérations de *collapse* élémentaire de celles-ci

Plus généralement, nous dirons que deux complexes X et Y sont homologiquement équivalents et que X se contracte/*collapse* en Y s'il existe une séquence de *collapses élémentaires* qui déforme X en Y.

5 *Attachement*

L'attachement [Kong, 1995] et sa contraction est une notion importante puisqu'elle est la base de la notion de noyaux critiques. On parlera de l'attachement d'une n-face dans un complexe X comme étant l'intersection de la cellule engendrée par f et de son détachement dans X, autrement écrit $\texttt{Attach}(f, X) = f^- \setminus (X \ominus f)$. Dans le cas où f^- se contracte en son attachement, f est *simple*, alors on dira que f est *contractible*. Notons que si une face est attachée à tous ses voisins, cette face a la topologie d'une boule en dimension n, son attachement a la topologie d'une n-sphère et donc par conséquent ne se déforme pas en son attachement.

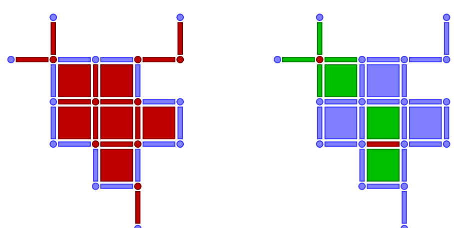
[Kong, 2017] généralise cette notion de *contractibilité* d'un attachement par la notion de polyèdre non-vide topologiquement simple (*NonEmpty Topologically Simple Polyhedra* : NETS Polyhedra). Pour faire simple, bien que [Kong, 2017] énonce 4 axiomes pour définir un *NETS Polyhedra* et des théorèmes qui en découlent, nous verrons un *NETS Polyhedra* comme ayant la structure d'un arbre en dimension quelconque et homologique à une boule dans cette dimension, c'est-à-dire un élément connecté, dont le complément dans la bordure de la cellule/polytope qui le contient est connecté et de caractéristique d'Euler égale à 1. Par exemple dans le cas de la dimension 3, on peut voir les *NETS Polyhedra* comme vivant sur la surface du volume définit par l'élément atomique, dont on vérifie que le complémentaire dans cette surface est aussi connecté et que le genre de la surface donné par la caractéristique d'Euler est bien le même que celui d'une boule pour permettre l'homologie (pour vérifier qu'il n'y a pas de trous, tunnels ou leur généralisation).

Pour faire le lien avec la notion de *contractibi-*

lité d'un attachement et sa généralisation : l'attachement d'une cellule est un *NETS Polyhedra* si et seulement si il est *contractible*. Depuis cette définition, il suffit donc de vérifier que l'attachement d'une cellule est un *NETS Polyhedra* ou non pour savoir si c'est un point simple ou non.

6 *Noyau critique*

Nous dirons d'une face qu'elle est *essentielle* si elle est l'intersection de toutes les faces principales qui la contiennent. Notons que les faces de plus grand degré sont par définition essentielles. Par la même occasion, il est intéressant d'introduire la notion de *clique*. C'est-à-dire que la *clique* d'une face f est l'ensemble des faces g qui la contiennent noté $\texttt{Clique}\,(f, X) = \{g \in X \mid g \supseteq f\}$. Là où la notion de clique est liée à celle de face essentielle est qu'on dit que face f est essentielle si elle est l'intersection des tous les éléments de sa clique, autrement dit dès lors que $f = \bigcap \texttt{Clique}\,(f, X)$. Par définition, les faces principales sont essentielles.



Faces essentielles (en rouge) — Exemples de cliques (rouge : f) (vert : $\texttt{Clique}\,(f, X)$)

FIGURE 6 – Illustration des faces essentielles et de deux cliques

Le noyau d'une face f est l'ensemble des cellules associées aux faces essentielles qui intersectent la cellule associée à la face f, aussi noté $\texttt{Core}\,(f, X) = (f^- \setminus f^+) \cap (\bigcup \{g^- \mid g \textit{ : une face essentielle de } X\})$. Notons que $(f^- \setminus f^+)$ est simplement la bordure de la face f que nous noterons $\widehat{f}^*$. Dans le cas où X est un complexe, ce qui est notre cas, on a que $\texttt{Attach}\,(f, X) = \texttt{Core}\,(f, X)$. Notons qu'il est aussi possible de se représenter le *noyau* d'une face f par le fait qu'il est en fait le complexe impliqué par l'intersection des faces essentielles avec la bordure de f $(\widehat{f}^*)$: $\left(\widehat{f}^* \cap \texttt{Ess}\,(X)\right)^-$.

L'utilité de définir le noyau ici est de pouvoir classifier les faces en deux catégories :

- les faces régulières : dont le noyau est *contractible*.
- les faces critiques : dont le noyau n'est pas *contractible*.

Ces notions sont encore vraies modulo généralisation par les *NETS Polyhedra*. Nous illustrons en figure 7 un exemple de face régulière et de face critique.

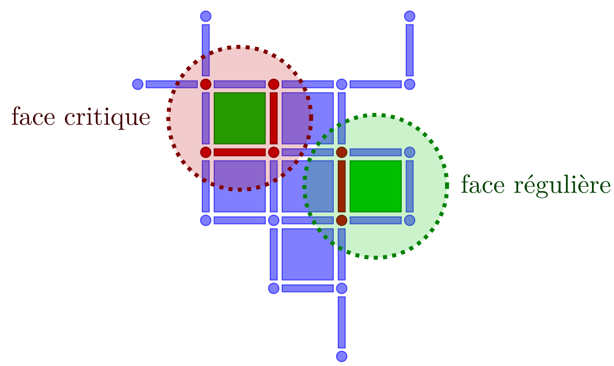
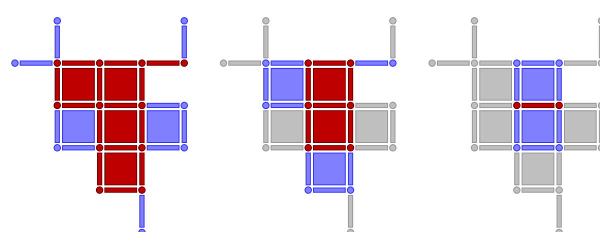


FIGURE 7 – Mise en évidence d'une 2-face critique et d'une 2-face régulière

L'ensemble des faces critiques d'un complexe X formera le complexe noté comme le noyau critique de X : $C_k\,(X)$. La propriété intéressante du noyau critique de X est qu'il est homologique à X, donc X se contracte en $C_k\,(X)$.



$X_1 = C_k\,(X)$ (en rouge) — $X_2 = C_k\,(X_1)$ (en rouge) — $X_3 = C_k\,(X_2)$ (en rouge)

FIGURE 8 – Amincissement par calcul de noyaux critiques successifs

Une notion intéressante qu'il est possible d'en déduire est celle des *faces critiques maximales* aussi appelées *faces M-critiques*. Les faces M-critiques d'un complexe X sont les faces principales du noyau critique de X. Cette notion est intéressante pour en déduire les *ensembles minimaux non-simples* introduits par Ronse [Rosenfeld, 1970] qui sont les cliques induites par les faces M-critiques mais nous ne les détaillerons pas plus dans ce document laissant le soin au lecteur de s'intéresser aux résultats proposés sur cette notion [Rosenfeld, 1970] et lien avec le document [Bertrand and Couprie, 2009] [Kong, 2017].

La grande force et l'intérêt des noyaux critiques pour l'affinement d'un complexe X associé à une image est que l'ensemble définit par $X \setminus C_k(X)$ est un ensemble hiérarchiquement homologiquement simple, autrement dit un ensemble P-simple dans les grilles cartésiennes. Par conséquent, $X \setminus C_k(X)$ est un ensemble simple et qui reste simple si privé de tout sous-ensemble ce qui fait des noyaux critiques un outil très intéressant pour la suppression de points en parallèle et le développement des méthodes efficaces exploitant cette propriété proposées par Bertrand et Couprie.

7 *Liens entre noyaux critiques et ensembles P-simples*

Pour terminer mon document, je souhaite proposer différentes propriétés intéressantes énoncées et prouvées principalement par [Kong, 2017] [Kong, 2019] depuis les notions abordées précédemment.

Un théorème intéressant donné par Bertrand et Couprie généralisé par [Kong, 2019] dit que Y est un ensemble héréditairement et homologiquement simple dans un complexe X si et seulement si toute face du noyau critique de X est contenue dans un composant de $X \setminus Y$. Ce qui est intéressant dans le résultat de ce théorème est qu'il permet de vérifier qu'un ensemble héréditairement et homologiquement simple est disjoint du noyau critique au sens des complexes.

Un autre résultat intéressant donné par [Kong, 2017] sur les points P-simples est que un ensemble Y est héréditairement et homologiquement simple dans un complexe X si et seulement s'il n'y a pas de cellule critique f telle que sa clique soient inclue dans Y. Ceci reste dans la même idée que le précédent théorème introduit.

8 *Conclusion*

Les travaux de [Kong, 2017] et [Kong, 2019] donnent une généralisation intéressante des différents concepts énoncés par [Bertrand, 2007]. Dans un premier il généralise la notion des faces dans des grilles cartésiennes à des polytopes en dimension quelconque. Puis propose de voir la notion de points *P-simples* par des ensembles *héréditairement et homologiquement simples* ce qui conduit par équivalence à des ensembles *séquentiellement et homologiquement simples* et donne une vision plus intuitive du fait de *supprimer* ces points en parallèle dans des algorithmes efficaces [Bertrand and Couprie, 2009]. De plus, il généralise la notion de *contractibilité* par la notion de *NETS polyhedra*, ce qui conduit à avoir un critère plus général et simple à évaluer en dimension supérieure à 4 pour déterminer si une cellule est critique ou non. Ceci fait que la généralisation des faces par des polytopes permet d'importer la notion de noyau critique définie à l'origine dans les grilles cartésiennes à une définition plus générale en grande dimension.

Références

[Bertrand, 1995] Bertrand, G. (1995). On p-simple points. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série Math.*, 1(321) :1077–1084.

[Bertrand, 2007] Bertrand, G. (2007). On critical kernels. *Comptes Rendus Mathematique*, 345(7) :363–367.

[Bertrand and Couprie, 2008] Bertrand, G. and Couprie, M. (2008). Two-dimensional parallel thinning algorithms based on critical kernels. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 31(1) :35–56.

[Bertrand and Couprie, 2009] Bertrand, G. and Couprie, M. (2009). On parallel thinning algorithms : minimal non-simple sets, p-simple points and critical kernels. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 35(1) :23–35.

[Bertrand and Couprie, 2014] Bertrand, G. and Couprie, M. (2014). Powerful parallel and symmetric 3d thinning schemes based on critical kernels. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 48(1) :134–148.

[Bertrand and Couprie, 2015] Bertrand, G. and Couprie, M. (2015). Isthmus based parallel and symmetric 3d thinning algorithms. *Graphical Models*, 80 :1–15.

[Couprie and Bertrand, 2016] Couprie, M. and Bertrand, G. (2016). Asymmetric parallel 3d thinning scheme and algorithms based on isthmuses. *Pattern Recognition Letters*, 76 :22–31.

[Kong, 2017] Kong, T. (2017). Critical kernels, minimal nonsimple sets, and hereditarily simple sets in binary images on n-dimensional polytopal complexes. In *Skeletonization*, pages 211–256. Elsevier.

[Kong, 1993] Kong, T. Y. (1993). Problem of determining whether a parallel reduction operator for n-dimensional binary images always preserves topology. In *Vision Geometry II*, volume 2060, pages 69–78. International Society for Optics and Photonics.

[Kong, 1995] Kong, T. Y. (1995). On topology preservation in 2-d and 3-d thinning. *International journal of pattern recognition and artificial intelligence*, 9(05) :813–844.

[Kong, 2019] Kong, T. Y. (2019). Hereditarily homology-simple setsand homology critical kernels ofbinary images on sets of convex polytopes. In *21st Intenational Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI 2019)*.

[Morgenthaler, 1981] Morgenthaler, D. G. (1981). Three-dimensional simple points : sereial erosion, parallel thinning and skeletonization. *TR-1005*.

[Rosenfeld, 1970] Rosenfeld, A. (1970). Connectivity in digital pictures. *Journal of the ACM (JACM)*, 17(1) :146–160.