Polynômes irréductibles dans $\mathbb{F}_2[X]$, codes correcteurs BCH et QR codes

Kevin Trancho
L3 Informatique

Université Paris-Est Marne-la-Vallée
Projet tuteuré encadré par Marc ZIPSTEIN et Jean-Yves THIBON

20 Juin 2017

Sommaire

UNIVERSITÉ PARIS-EST MARNE-LA-VALLÉE

Sujet

- Comprendre notion de Corps fini et recherche de polynômes irréductibles $\mathbb{F}_2[X]$
- Initiation codes correcteurs BCH et codes Reed-Solomon
- Création d'une version du QR code
- Codé en 10 000 lignes de C pour plus de 400 fonctions dans 31 fichiers sources

UNIVERSITÉ PARIS-EST MARNE-LA-VALLÉE

Implémentations de base

- $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- Addition et soustraction implémentées par le ‘xor‘
- Multiplication décalage bit-à-bit selon degré des monômes et addition par ‘xor‘
- Recherche de polynômes irréductibles pour calcul d'inverse et construction de corps finis $\mathbb{F}_{2^{deg(p)}} = \mathbb{F}_2[X]/p(X)$
- Calcul des inverse par implémentation identité de Bezout :

$$PGCD(p(x), q(x)) = u(x)p(x) + v(x)q(x)$$

$$r_k(x) = u_k(x)p(x) + v_k(x)q(x)$$

UNIVERSITÉ PARIS-EST MARNE-LA-VALLÉE

Crible d'Eratosthène au degré n

- Utilise des polynômes codés sur un entier pour plus de vitesse (limité au degré 31)
- Fabriquer liste des polynômes de degré n
- Calculer le produit de tous les polynômes irréductibles $p_1, p_2, ..., p_q$ de degré inférieur à n
- Estimer irréductible tout polynôme non éliminé par le calcul de produits

UNIVERSITÉ PARIS-EST MARNE-LA-VALLÉE

Recherche par factorisation récursive

- Générer aléatoirement un polynôme de degré n quelconque
- Tester l'irréductibilité :
  - Tester s'il divise $X^{2^n} - X$
  - Factoriser par l'algorithme de Berlekamp
- Si non irréductible, appliquer le test récursivement jusqu'à trouver tous les facteurs irréductibles
- Plus haut polynôme irréductible trouvé de degré 11 457

UNIVERSITÉ PARIS-EST MARNE-LA-VALLÉE

Construction BCH

- BCH taille n pouvant corriger t erreurs
- Choisir un polynôme primitif et un élément primitif α
- Construire g le polynôme minimal tel que

$$g(\alpha) = g(\alpha^3) = \ldots = g(\alpha^{2t-1})$$

- Calcul des $M_i \in \mathbb{F}_2[X]$ tels que
  $M_i(x) = (x - \alpha^i)(x - \alpha^{2i}) \ldots (x - \alpha^{2^{(k-1)}i})$, $k > 0$, $2^k i \equiv i[n]$
- Résolution système par implémentation méthode de Cramer
- $g(x) = PPCM(M_1(x), M_3(x), \ldots, M_{2t-1}(x))$

UNIVERSITÉ PARIS-EST MARNE-LA-VALLÉE

Codage et Correction d'erreurs

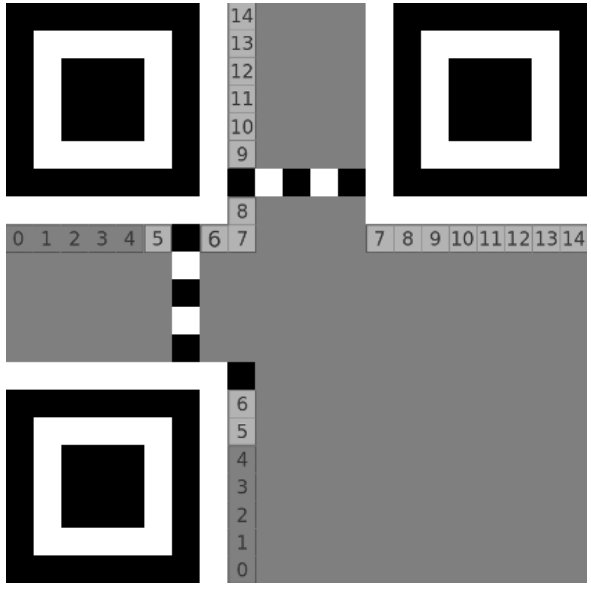
- Calcul du reste du message m modulo g
- Calcul des syndromes, évaluation des $s_i = m(\alpha^i)$, $i \in [\![1, 2t]\!]$
- Calcul du polynôme localisateur σ avec $deg(w) < t$:

$$\sigma(x)s(x) + v(x)x^{2t} = w(x)$$

- Chien search pour correction des erreurs

UNIVERSITÉ PARIS-EST MARNE-LA-VALLÉE

Construction format



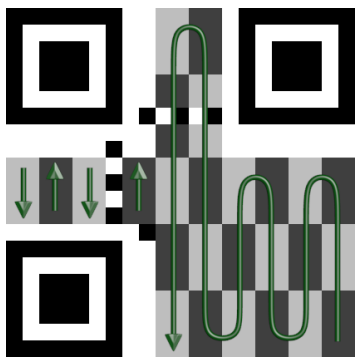
- Format codé par BCH : taux de correction d'erreurs et masque
- ‘xor‘ message codé et ‘101010000010010‘

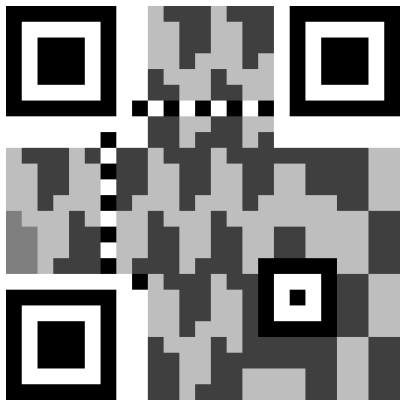
Construction données

- Mode : Numérique, Alphanumérique et Bytes implémentés
- Codes de Reed-Solomon pour correction de t_c erreurs, message taille t_m, taille totale des données à écrire t
- Construction de $\mathbb{F}_{256} = \mathbb{F}_2[X]/(X^8 + X^4 + X^3 + X^2 + 1)$
- $g(x) = \prod_{i=0}^{t-t_m-1} (x - \alpha^i)$
- Décomposition en blocs [Données - Correction Erreurs]

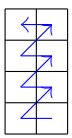
UNIVERSITÉ PARIS-EST MARNE-LA-VALLÉE

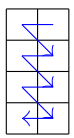
Ecriture dans le QR code

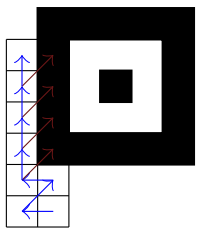


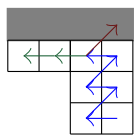


Vers le haut Vers le bas Obstacle Bordure









Correction des erreurs

- Calcul des syndromes, polynôme localisateur et chien search comme pour les BCH
- Calcul de l'erreur par algorithme de Forney :
  - $\Omega(x) = s(x)\sigma(x) \quad mod \quad x^{t_c}$
  - valeur de l'erreur en position i :

$$\frac{\alpha^i \Omega(\alpha^{-i})}{\sigma'(\alpha^{-i})}$$

Démonstration

- Création d'un QR code
- Décodage d'un QR code avec erreurs

UNIVERSITÉ PARIS-EST MARNE-LA-VALLÉE

Conclusion

- Initiation à la cryptographie intéressante et très instructive en continuité des notions vues en Mathématiques pour l'Informatique 4
- Intérêt pour une utilisation contemporaine : QR codes
- Merci de votre attention
- Posez vos questions

UNIVERSITÉ PARIS-EST MARNE-LA-VALLÉE