



UNIVERSITÉ
PARIS-EST
MARNE-LA-VALLÉE



Flot par les faces en 3D

Projet de géométrie différentielle discrète

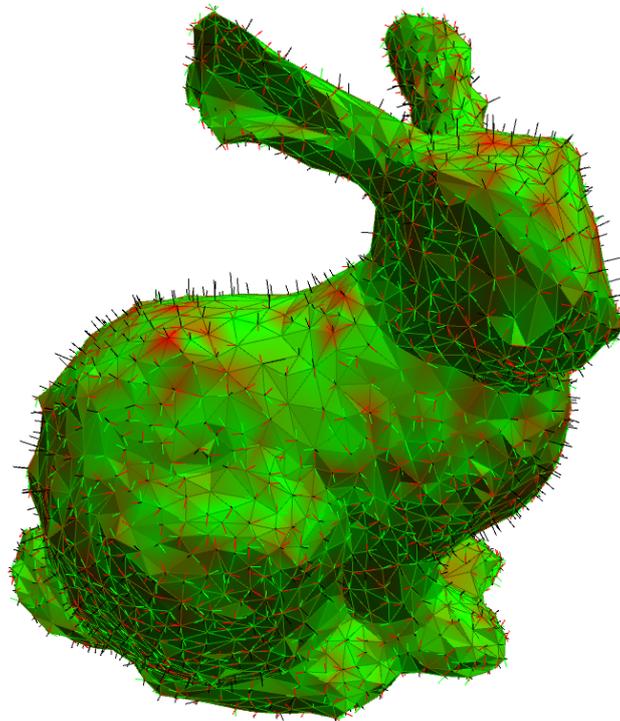
Kevin TRANCHO

Victor VEILLERETTE

Master Informatique 2^{ème} année

Spécialité Sciences de l'image

Année 2018 - 2019



1 Implémentation des surfaces et déformations

Une surface discrète en 3 dimensions est donnée par un ensemble de sommets S (ici des points de \mathbb{R}^3), d'arêtes et de faces. Pour manipuler les surfaces discrètes informatiquement nous proposons l'utilisation d'une structure de listes d'adjacences. Une liste d'adjacence est donnée pour un sommet d'un graphe comme la liste de ses voisins. Une utilisation de cette structure de données sur des graphes que nous proposons sur des surfaces consiste à donner pour tout sommet p de la surface chaque voisin $v_i(p)$ ainsi que les faces sur lesquelles est présente l'arête $(p, v_i(p))$. Cette structure sous forme de listes d'adjacences est par définition équivalente à une surface donnée par une matrice d'adjacence et matrice d'incidence mais avec l'avantage qu'il est possible d'obtenir les arêtes et faces sur lesquelles est présent un sommet en temps linéaire en le nombre de voisins de ce sommet.

Dans ce programme, l'objectif est de déformer la surface à l'aide d'un flot de courbure discrète. Nous définissons un flot par un champs de vecteur discret, ici c'est simplement une liste de vecteurs dans \mathbb{R}^3 que l'on fait concorder avec les sommets de la surface. Nous noterons $H(p)$ le vecteur du flot associé à un sommet p . À chaque itération nous calculons le flot H pour une méthode de courbure donnée sur la surface à un temps t , puis pour chaque sommet p_t de la surface, nous obtenons le sommet p_{t+1} de la surface déformée par

$$p_{t+1} = p_t + \tau \frac{H(p_t)}{|H|_2}$$

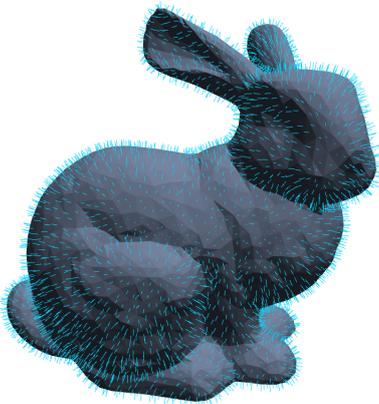
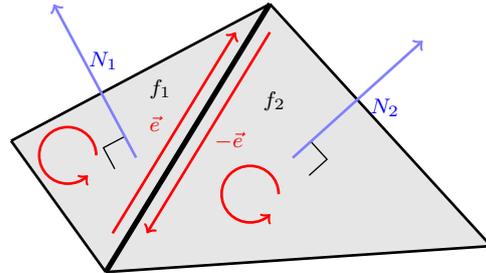
où τ est un paramètre arbitraire et $|H|_2 = \sqrt{\sum_{p \in S} H(p) \cdot H(p)}$.

Nous renormalisons le flot par la norme L^2 pour pouvoir comparer les différents flots de courbure sans avoir à effectuer de grands réajustements de τ .

2 Flot par les faces

2.1 Normales aux faces

Pour calculer l'ensemble des normales des faces d'une surface, il faut dans un premier temps travailler sur une surface orientée. On dit qu'une surface est orientée si toutes les faces sont de même orientation, c'est-à-dire que ceci est vrai si pour tout arête e sur deux faces f_1 et f_2 , on retrouve \vec{e} sur f_1 et $-\vec{e}$ sur f_2 comme sur le schéma ci-contre.



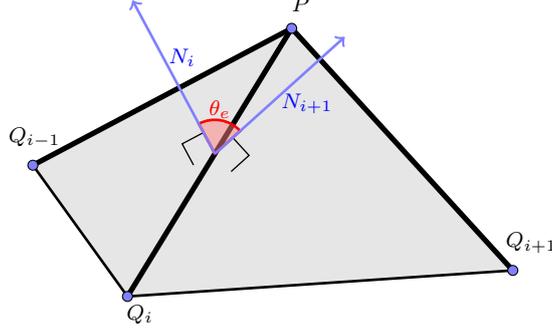
Ensuite pour une face $f = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, il est possible de déterminer la normale à la face : $N(f) = v_1 \vec{v}_2 \wedge v_1 \vec{v}_3$. Si la surface est orientée, l'ensemble des normales sera orienté de la même manière. L'image ci-contre illustre les normales ainsi obtenues sur une surface orientée.

2.2 Flot de courbure moyenne et angle dièdre

Le flot de courbure moyenne est défini comme la direction optimale pour augmenter l'aire du voisinage d'un sommet p . Nous noterons $star(p)$ l'ensemble de p et de son voisinage. La définition de la courbure moyenne qui nous intéresse est celle donnée sur les arêtes par :

$$H(e) = H_e N(e) = -\frac{|e|}{2} \sin\left(\frac{\theta_e}{2}\right) N(e)$$

où θ_e est l'angle dièdre en e et $N(e) = \frac{N_i + N_{i+1}}{\|N_i + N_{i+1}\|}$ est le vecteur unitaire normal en e , c'est-à-dire l'angle entre les normales des deux faces incidentes à e .



La définition donnée par les arêtes est équivalente à celle donnée sur les sommets par la formule des cotangentes à la différence qu'informatiquement nous avons moins d'erreurs de précision dans le calcul de flot lorsque certains angles de la face tendent vers 0. Informatiquement il serait coûteux de calculer l'angle dièdre pour obtenir le flot et nous préférons les opérations à base de produits scalaires et produits vectoriels, nous utilisons donc la formule équivalente par définition calculée depuis un produit vectoriel qui est le suivant :

$$H(e) = -\frac{|e|}{2} \sin\left(\frac{\theta_e}{2}\right) N(e) = -\frac{1}{4} (N_i - N_{i+1}) \wedge \vec{e}$$

Pour calculer informatiquement le flot par les arêtes, nous calculons chaque flot dans une matrice d'adjacence dont les coefficients de la matrice sont les vecteurs $H(u, v)$ calculés pour chaque arête (u, v) de la surface :

$$\begin{pmatrix} H(u_1, u_1) & H(u_1, u_2) & \cdots & H(u_1, u_n) \\ H(u_2, u_1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ H(u_n, u_1) & \cdots & H(u_n, u_{n-1}) & H(u_n, u_n) \end{pmatrix}$$

Notons qu'ensuite, pour obtenir le flot en un sommet p depuis le flot par les arêtes, il suffit de calculer :

$$H(p) = \sum_{e \ni p} H(e)$$

3 Flot de courbure moyenne par les faces

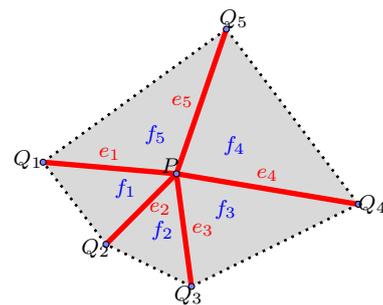
Le flot de courbure moyenne par les faces sera défini depuis les normales $N(f)$ en chaque face f de la surface discrète. Pour un premier calcul nous proposons donc d'établir la liste des normales en chaque face de la surface dont le calcul est donné en partie 2.1.

Dans l'étape suivante, nous allons exprimer le flot de courbure en chaque sommet depuis les normales calculées précédemment par la formule suivante :

$$H(p) = \sum_{f_i \in \text{star}(p)} -\frac{1}{4} \left(|e_i| \tan\left(\frac{\theta_{e_i}}{2}\right) + |e_{i+1}| \tan\left(\frac{\theta_{e_{i+1}}}{2}\right) \right) N(f_i)$$

où e_i et e_{i+1} sont les arêtes appartenant à f_i . Notons que le flot final appliqué aux sommets sera : $\frac{H(p)}{|H(p)|}$.

Illustration de $\text{star}(P)$:



Notons qu'ici nous souhaitons calculer $|e| \tan\left(\frac{\theta_e}{2}\right)$ efficacement tout comme sur la courbure moyenne définie sur les arêtes. En réalité nous pouvons réutiliser le calcul donné sur les arêtes précédemment car en effet :

$$N(e) = \frac{N_i + N_{i+1}}{\|N_i + N_{i+1}\|} = \frac{N_i + N_{i+1}}{2 \cos\left(\frac{\theta_e}{2}\right)}$$

D'où :

$$\frac{|e|}{2} \sin\left(\frac{\theta_e}{2}\right) N(e) = \frac{|e|}{4} \frac{\sin\left(\frac{\theta_e}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_e}{2}\right)} (N_i + N_{i+1}) = \frac{|e|}{4} \tan\left(\frac{\theta_e}{2}\right) (N_i + N_{i+1})$$

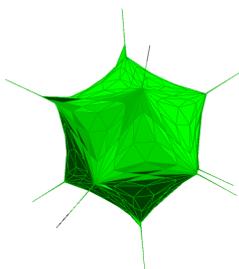
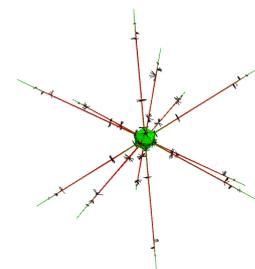
Or, nous avons proposé plus haut un calcul plus efficace de $\frac{|e|}{2} \sin\left(\frac{\theta_e}{2}\right) N(e) = \frac{1}{4} (N_i - N_{i+1}) \wedge \vec{e}$. Pour récupérer la quantité utile au calcul de notre expression donnée précédemment nous proposons donc de calculer :

$$|e| \tan\left(\frac{\theta_e}{2}\right) = \frac{((N_i - N_{i+1}) \wedge \vec{e}) \cdot (N_i + N_{i+1})}{(N_i + N_{i+1}) \cdot (N_i + N_{i+1})}$$

(On récupère le coefficient en profitant de la bilinéarité du produit scalaire).

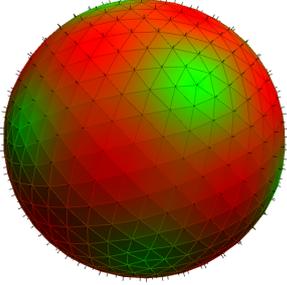
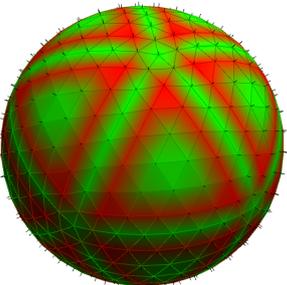
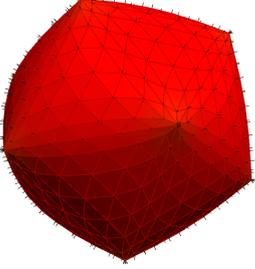
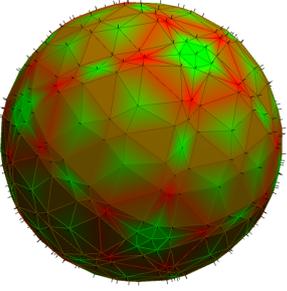
4 Expérimentations

Pour les expérimentations suivantes, le paramètre τ est gardé à 25. Le flot défini sur les sommets et celui défini sur les arêtes sont par définition équivalents, cependant celui par les arêtes est plus robuste à l'instabilité numérique. En effet, proposons par l'exemple la déformation de l'ico-sphère : , par ces deux flots :

Flot	sur les sommets	sur les arêtes
Nombre de déformations :	974	7195
Résultat :		

Ce que nous souhaitons mettre en évidence ici est que qu'à partir d'un certain nombre de déformations le flot défini sur les sommets pose problème. En effet pour rappel sa définition porte sur les angles sur les faces de $star(p)$. Or ici ces faces s'écrasent deviennent si petites que la définition donnée par la cotangente : $\cot(\phi) = \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}$ fait que lorsque ϕ tend vers 0, alors la norme du vecteur en p tend vers l'infini d'où le problème observé avec l'apparition des singularités de la surface.

Une autre observation concerne l'apparition de singularités sur les figures régulières. Nous proposons donc ici de comparer le flot sur les arêtes et le flot sur les faces. En effet, par le flot donné sur les arêtes nous pouvons observer l'apparition de singularités sur l'ico-sphère dès 365 déformations alors que par exemple pour encore 500 déformations le flot par les faces semble garder l'ico-sphère invariante. Mais nous pouvons malgré tout observer d'autres singularités par le flot par les faces. En effet, dès 1500 déformations nous observons aussi des singularités lorsque les arêtes des faces deviennent trop petites pour un calcul correct de la normale en chaque face.

Flot	par les arêtes	par les faces
Nombre de déformations :	8	487
presque invariant		
Nombre de déformations :	365	1450
début de singularités		
Nombre de déformations :	457	1675
Singularités	