



UNIVERSITÉ
PARIS-EST
MARNE-LA-VALLÉE



Flot par les faces en 3D

Projet de géométrie différentielle discrète

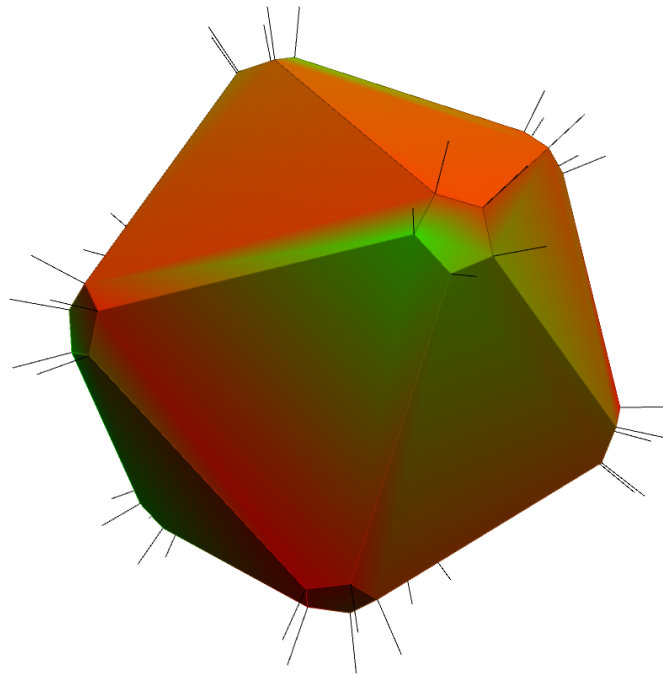
Kevin TRANCHO

Victor VEILLERETTE

Master Informatique 2^{ème} année

Spécialité Sciences de l'image

Année 2018 - 2019



1 Implémentation des surfaces et déformations

Une surface discrète en 3 dimensions est donnée par un ensemble de sommets S (ici des points de \mathbb{R}^3), d'arêtes et de faces. Pour manipuler les surfaces discrètes informatiquement nous proposons l'utilisation d'une structure de listes d'adjacences. Une liste d'adjacence est donnée pour un sommet d'un graphe comme la liste de ses voisins. Une utilisation de cette structure de données sur des graphes que nous proposons sur des surfaces consiste à donner pour tout sommet p de la surface chaque voisin $v_i(p)$ ainsi que les faces sur lesquelles est présente l'arête $(p, v_i(p))$. Cette structure sous forme de listes d'adjacences est par définition équivalente à une surface donnée par une matrice d'adjacence et matrice d'incidence mais avec l'avantage qu'il est possible d'obtenir les arêtes et faces sur lesquelles est présent un sommet en temps linéaire en le nombre de voisins de ce sommet.

Dans ce programme, l'objectif est de déformer la surface à l'aide d'un flot de courbure discrète. Nous définissons un flot par un champs de vecteur discret, ici c'est simplement une liste de vecteurs dans \mathbb{R}^3 que l'on fait concorder avec les sommets de la surface. Nous noterons $H(p)$ le vecteur du flot associé à un sommet p . À chaque itération nous calculons le flot H pour une méthode de courbure donnée sur la surface à un temps t , puis pour chaque sommet p_t de la surface, nous obtenons le sommet p_{t+1} de la surface déformée par

$$p_{t+1} = p_t + \tau \frac{H(p_t)}{|H|_2}$$

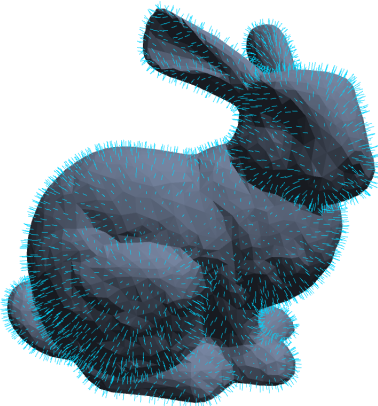
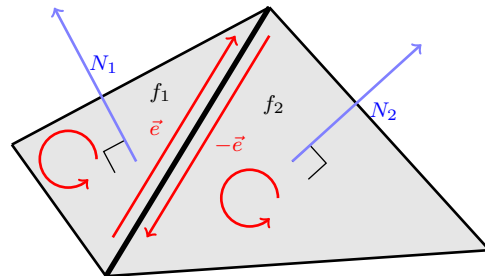
où τ est un paramètre arbitraire et $|H|_2 = \sqrt{\sum_{p \in S} H(p) \cdot H(p)}$.

Nous renormalisons le flot par la norme L^2 pour pouvoir comparer les différents flots de courbure sans avoir à effectuer de grands réajustements de τ .

2 Flot par les faces

2.1 Normales aux faces

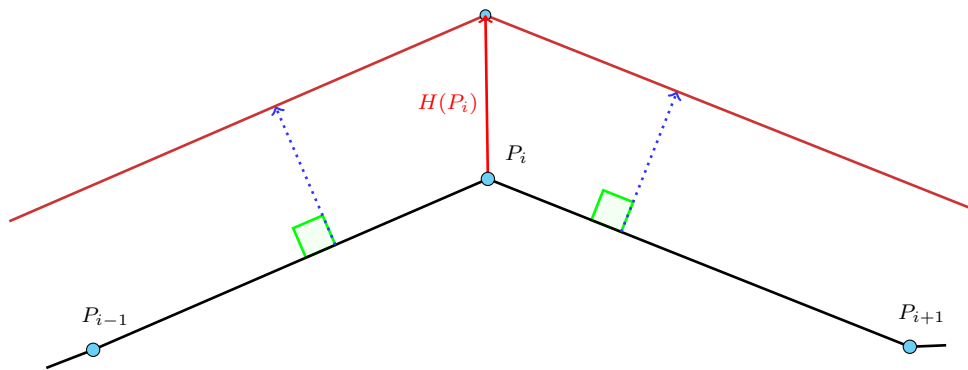
Pour calculer l'ensemble des normales des faces d'une surface, il faut dans un premier temps travailler sur une surface orientée. On dit qu'une surface est orientée si toutes les faces sont de même orientation, c'est-à-dire que ceci est vrai si pour tout arête e sur deux faces f_1 et f_2 , on retrouve \vec{e} sur f_1 et $-\vec{e}$ sur f_2 comme sur le schéma ci-contre.



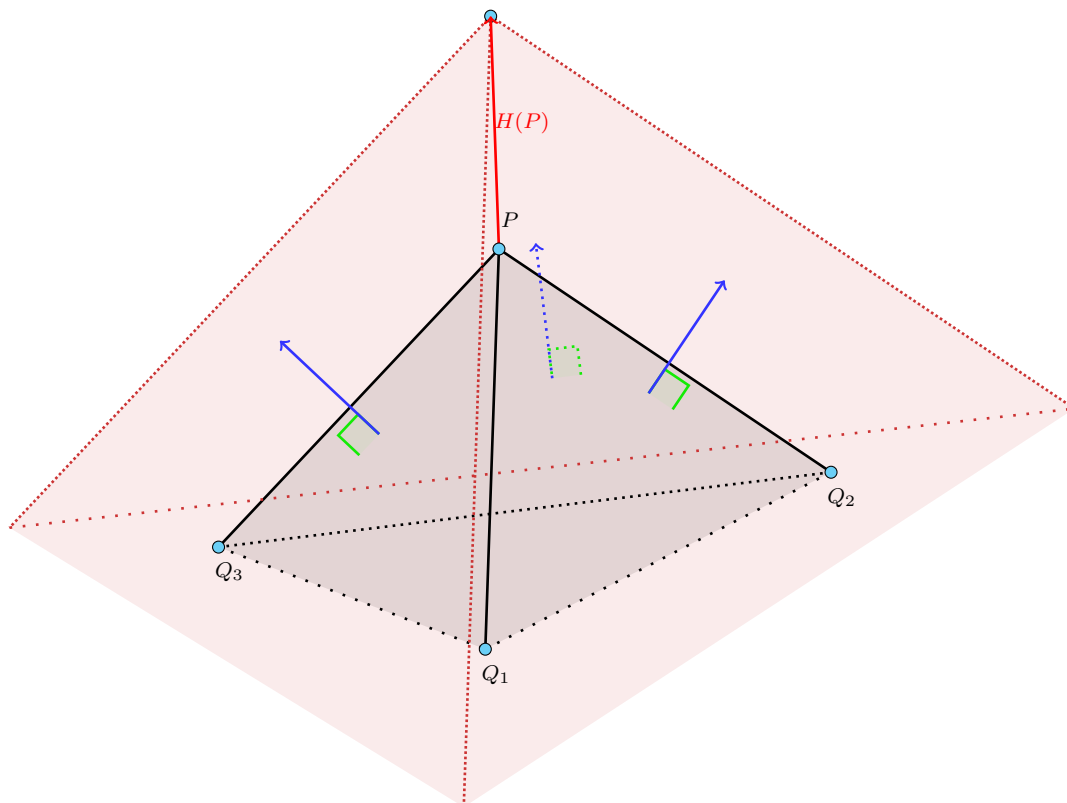
Ensuite pour une face $f = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, il est possible de déterminer la normale à la face : $N(f) = v_1 \vec{v}_2 \wedge v_1 \vec{v}_3$. Si la surface est orientée, l'ensemble des normales sera orienté de la même manière. L'image ci-contre illustre les normales ainsi obtenues sur une surface orientée.

2.2 Flot par les arêtes en 2D

Le flot proposé par les faces en 3D sur les surfaces s'inspire de l'idée utilisée pour calculer un flot par les arêtes en 2D sur les courbes. C'est-à-dire que pour toute arête nous allons considérer la droite associée à celle-ci et sa normale. Nous déplaçons chaque droite associée à une arête suivant la direction de sa normale d'une distance arbitraire donnée. Puis l'intersection des nouvelles droites obtenues donne les sommets et par suite les arêtes. Ceci nous permet de calculer ainsi un flot H par les arêtes en tout sommet comme illustré sur le schéma suivant :

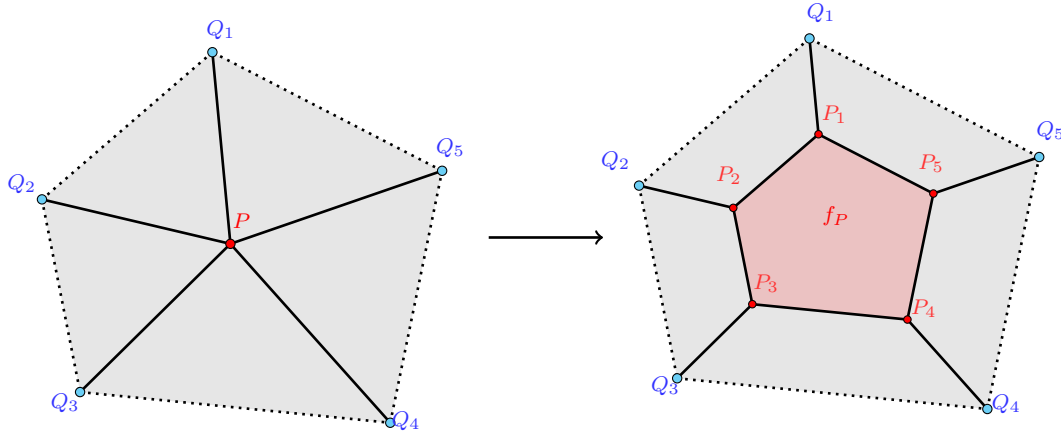


Nous souhaitons ensuite généraliser cette idée en 3 dimensions. Dans la même idée nous allons déplacer les plans associés à chaque face en suivant leur normale et tenter de déterminer une intersection de ceux-ci comme illustré ci-dessous. Notons que ce flot est applicable aux surfaces où tout sommet est de degré 3. Malheureusement si un sommet est de degré au moins 4 cette solution générique n'existe pas.



2.3 Solution proposée

La solution proposée consiste à regarder les sommets pour lesquels le flot tel que défini précédemment ne donne pas de solution comme des endroits de la surface où un sommet est en réalité une face d'aire nulle. Pour ceci on autorise la modification de la surface discrète. L'intérêt de ce point de vue est qu'on va pouvoir résoudre le problème localement au sommet (en travaillant sur $star(P)$). Nous noterons l'écrasement d'un sommet P de degré n en une face $f_P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ l'opération qui transforme un sommet en une face comme sur le schéma suivant :



C'est-à-dire que pour toute face incidente à P et Q_i, Q_{i+1} ses voisins sur cette face, P sera remplacé dans cette face par une arête (P_i, P_{i+1}) de sorte que $(Q_i, P_i, P_{i+1}, Q_{i+1})$ remplace le chemin (Q_i, P, Q_{i+1}) sur la face. Une fois les faces voisines éditées, on ajoute f_P à la surface. Notons que bien que la face f_P ajoutée soit d'aire nulle, nous avons maintenant transformé P en un ensemble de sommets de degré 3 ce qui nous permet d'appliquer le flot par les faces tel que défini précédemment. Le problème était ici posé par le fait que travailler sur une surface discrète ajoute la contrainte que les faces sont liées aux sommets existants ce qui ne leur permet pas un déplacement libre. La solution permet aux faces de s'affranchir de la contrainte imposée par les sommets posant problème au coût de devoir changer la combinatoire de la surface. L'avantage reste que si un sommet posait problème cette opération ne sera effectuée qu'une fois au moment de régler l'incompatibilité avec le flot ce qui multipliera au plus le nombre de sommets d'un facteur n_{max} où n_{max} est le plus grand degré dans la surface étudiée.

Une autre chose à prendre en compte ici est qu'il faut calculer une normale en P ce qui déterminera une normale pour f_P . Car la définition de la normale donnée par le produit vectoriel donnera une normale nulle car les points sont confondus sur la face.

2.4 Méthode de calcul du flot en un sommet

Pour calculer le flot en un sommet P , nous proposons de travailler sur N l'ensemble des normales des faces incidentes au sommet. L'intérêt de travailler que sur les normales est que ceci permet de simplifier le calcul en sommet dans des cas dégénérés : par exemple si le sommet est sur une face (toutes les normales sont équivalentes à une normale) ou s'il est sur une arête (les normales sont équivalentes à deux normales). Ce qui ne pose pas problème avec la définition du flot par les faces même si le sommet est de degré plus grand que 3. En effet dans le cas où le calcul se réduit à une normale, on déplace le sommet le long de la normale. Et si le calcul se réduit à deux normales N_1, N_2 , il est possible de poser $N_3 = N_1 \wedge N_2$ qui définit la normale le long de l'arête que nous utiliserons pour contraindre la solution à rester sur le plan défini

par $Vect(N_1, N_2)$ (dans le calcul de l'intersection on imposera un déplacement null pour N_3). Si nous avons plus de 3 normales en un sommet, il faudra écraser P en f_P comme proposé précédemment avant de procéder au calcul de l'intersection. À noter qu'il faudra simuler une normale en $f_P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ avant de déplacer les P_i .

Pour calculer l'intersection en un sommet P , admettons que l'ensemble des faces incidentes admettent 3 vecteurs normaux unitaires $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ non semblables. Notons que $\vec{n}_i \cdot P = d_i$ où d_i est la distance signée du plan de normale \vec{n}_i passant par P . Posons alors $N = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ la matrice telle que ${}^T N \cdot P = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$. Notons que pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\vec{n}_i \cdot (P + \alpha \vec{n}_i) = \vec{n}_i \cdot P + \alpha$ car \vec{n}_i est unitaire. Nous souhaitons que Q soit l'intersection des plans translatés d' α par leur normale. D'où,

$${}^T N \cdot Q = (\vec{n}_i \cdot Q)_{i \in [3]} = (\vec{n}_i \cdot P + \alpha)_{i \in [3]} = {}^T N \cdot P + (\alpha)_{i \in [3]}.$$

Alors,

$$Q = ({}^T N)^{-1} ({}^T N \cdot P + (\alpha)_{i \in [3]}) = P + ({}^T N)^{-1} (\alpha)_{i \in [3]}.$$

Ce qui nous donne :

$$H(P) = ({}^T N)^{-1} (\alpha)_{i \in [3]}.$$

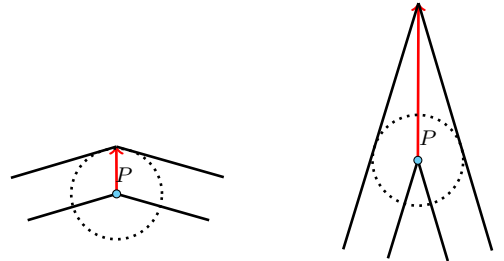
Notons que si nous n'avions que deux normales valides, il suffit de remplacer $(\alpha)_{i \in [3]}$ par $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ pour contraindre la 3^{ème} normale à ne pas se déplacer.

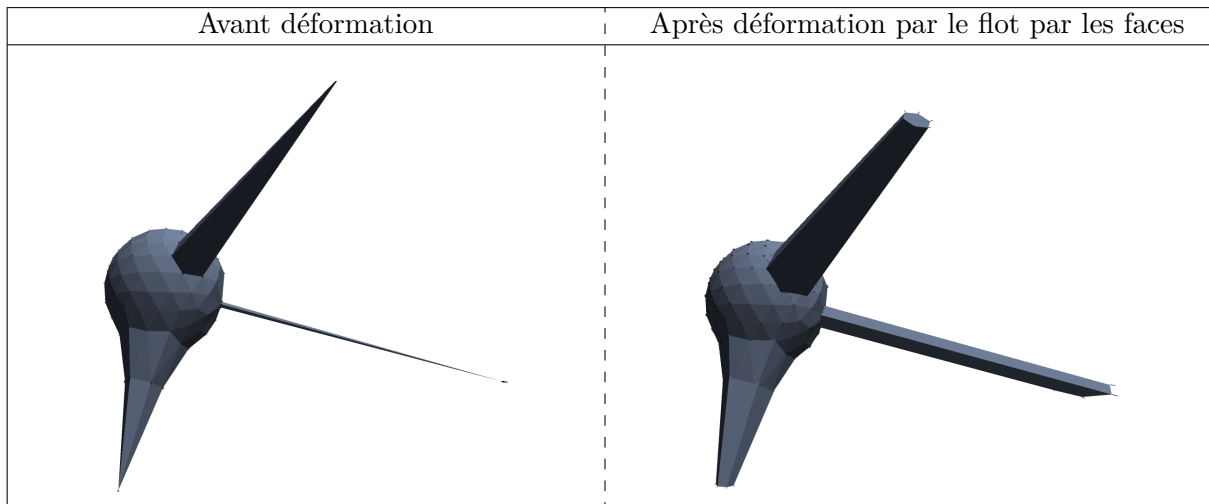
3 Résultats

Bien que des flots tels que ceux définis par la courbure moyenne, harmonique ou gaussienne par exemple ont un intérêt pour réduire le bruit sur une surface, ceci ne semble pas être le cas du flot par les faces tel que définit ici. En effet, le flot proposé augmente la hauteur des pics en les différentes sommets et risque de 'retourner' les faces s'il est utilisé pour réduire la taille de la surface (à la différences de d'autres flots qui correspondent à un calcul de gradient). Les expériences suivantes illustrent les deux propriétés énoncées ici.

3.1 Augmentation de la hauteur des pics

Raisonnons par raisonnement analogue sur les faces depuis le flot sur les arêtes en 2D. Plus un sommet va être plat, plus la magnitude du vecteur qui le déplace sera petite. Notons que si un sommet est sur une face il se déplace d'une distance α donné et que plus l'angle dièdre (entre les deux vecteurs normaux de part et d'autre du sommet en 2D respectivement arête en 3D) est grand plus le déplacement du sommet sera important pour qu'il soit à la nouvelle intersection des faces. Nous illustrons l'observation en 2D sur le schéma ci-contre.

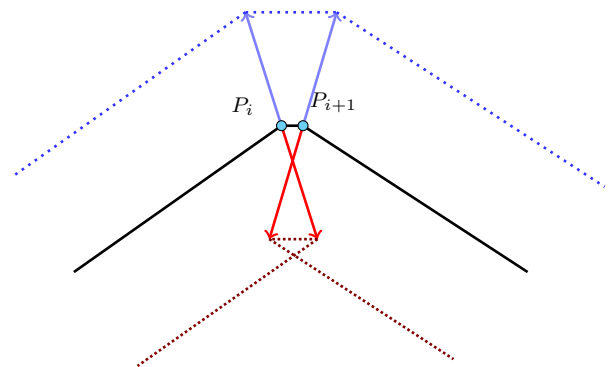




Notons ici que les 'pics' qu'on peut potentiellement observer sur la première figure sont 'écrasés' lors du flot par les faces. Mais ce qui reste notable est que la sphère au centre est une ico-sphère donc très régulière et ici les sommets sur la sphère sont plus plats que les sommets sur les singularités ce qui explique le très faible déplacement observé sur la sphère contre un déplacement important sur les singularités.

3.2 Inversion des faces

Lors de l'application des flots de régularisation énoncés, ils correspondent souvent à un gradient et sont utilisés comme flot pour minimiser une quantité. Dans le cas où on souhaiterait utiliser le flot par les faces de la même manière, ceci peut très rapidement mener à renverser des faces. Pour illustrer le problème, en rouge sur le schéma suivant, ce qui peut arriver à une arête dans le cas 2D s'il est par exemple trop petite.



Ici, nous pouvons observer le problème sur un géodésique. Notons qu'en particulier le fait d'écraser les sommets en une face d'aire nulle conduit à observer ce phénomène si on cherche à déplacer les faces vers l'intérieur.

